CASIO
CLASSWIZ

ClassWiz

ব্যবহার করে গণিত শিক্ষা

e-Education

বাংলাদেশ গণিত সমিতি
19 72
BANGLADESH MATHEMATICAL SOCIETY

BacBon Limited

মাধ্যমিক ও উচ্চ মাধ্যমিক স্তরের শিক্ষক ও শিক্ষার্থীদের জন্য রচিত।

ClassWiz
ব্যবহার করে গণিত শিক্ষা

রচনা

মোঃ আতেফ আরমান

কে.এম. আরিফুল কবীর

মোঃ রাকিবুল হাসান

এম. এম. জামান

সম্পাদনা

প্রফেসর ড. মুনিবুর রহমান চৌধুরী (অবঃ)

প্রফেসর ড. মোঃ মনিরুল আলম সরকার

প্রফেসর ড. মোঃ শহীদুল ইসলাম

প্রথম প্রকাশ: সেপ্টেম্বর, ২০১৭
দ্বিতীয় প্রকাশ: জানুয়ারি, ২০১৮

পুস্তক প্রণয়নে সমন্বয়ক

আব্দুল মতিন শেখ মাহিন

মো: আরিফ উল্যাহ খান

প্রচ্ছদ

ফরহাদুল ইসলাম (তুহিন)

ওয়ালি উল্লাহ্

কম্পিউটার কম্পোজ

মো: হাসেম আলী
মো: মামুনুর রশিদ তালুকদার

মুখবন্ধ

সকল উন্নত দেশ যখন শিক্ষাক্ষেত্রে পুরো মাত্রায় প্রযুক্তির ব্যবহার করছে তখন আমাদের দেশ অন্যান্য ক্ষেত্রে প্রযুক্তির ব্যবহারে অনেকাংশে এগিয়ে থাকলেও শিক্ষাক্ষেত্রে, বিশেষ করে মাধ্যমিক ও উচ্চ মাধ্যমিক পর্যায়ে পাঠদান কিংবা পাঠ-সহায়ক হিসেবে প্রযুক্তির ব্যবহারে বেশ পিছিয়ে। বিশেষ করে গণিত শিক্ষার ক্ষেত্রে প্রযুক্তির ব্যবহার তেমন একটা দেখা যায় না বললেই চলে। অথচ প্রযুক্তির ব্যবহার গণিতে পাঠদান অনেক সহজ করে তোলে। গণিত বুঝতে এবং আমাদের দেশের ছাত্রছাত্রীদের গণিতের ভীতি দূর করতে প্রযুক্তি বেশ সহায়ক ভূমিকা পালন করতে পারে। আর গণিত শিক্ষার ক্ষেত্রে প্রযুক্তি ব্যবহারের প্রাথমিক প্রয়াস হতে পারে ক্যালকুলেটরের ব্যবহার।

৪০ বছরের বেশি সময় ধরে Scientific Calculator গণনাযন্ত্র থেকে বিকাশ লাভ করে বিজ্ঞানী, প্রকৌশলী ও গণিতবিদদের জন্য গুরুত্বপূর্ণ শিক্ষা-উপকরণ হয়ে দাঁড়িয়েছে। যেটির সূচনা হয়েছিল শুধুমাত্র সংখ্যাগত প্রশ্নের উত্তর দেয়ার যন্ত্র হিসেবে, এখন তা শিক্ষক ও ছাত্রদের বিস্তৃত গাণিতিক ধারণা এবং গাণিতিক সম্পর্ক অন্বেষনের জন্য সাশ্রয়ী, শক্তিশালী ও সহজবোধ্য গাণিতিক যন্ত্র হিসেবে বিকাশ লাভ করেছে। বর্তমান সময়ে ক্যালকুলেটর তৈরিতে উল্লেখযোগ্য উন্নয়ন এবং সেই সাথে অভিজ্ঞতাসম্পন্ন শিক্ষকদের পরামর্শ নিয়ে Scientific ক্যালকুলেটর উন্নতির চরম সীমায় পৌঁছেছে। আর এর প্রমাণ হলো CASIO fx-991Ex, যেখানে বিভিন্ন রকম গাণিতিক প্রতীক ও চিহ্নের জন্যে ব্যাপক মাত্রায় Natural display ব্যবহার করা হয়েছে এবং রয়েছে Spreadsheet ব্যবহারের সুবিধা।

এই প্রকাশনায় ক্যালকুলেটরের এই উন্নতিকে গণিত শিক্ষার জন্য কীভাবে সর্বাধিক মাত্রায় কাজে লাগানো যায় তা আলোচনা করা হয়েছে। এতে আমরা ClassWiz কিভাবে গাণিতিক ধারণাগুলো বুঝতে এবং বিভিন্নরকম গাণিতিক সম্পর্ক অনুধাবনে সাহায্য করে তা আলোচনা করার চেষ্টা করেছি। মাধ্যমিক বিদ্যালয় ও এর বাইরের ছাত্র-ছাত্রীদের গণনার প্রয়োজন মেটানোর পাশাপাশি তাদের গাণিতিক ধারণা ও গণিত শিক্ষার ব্যাপারেও ClassWiz সহায়তা করে থাকে। ক্যালকুলেটর শুধুমাত্র গণনা করা ও গণনার শুদ্ধতা নিরূপনের যন্ত্রই নয়, গণিত বুঝতেও এর ব্যাপক ব্যবহার সম্ভব।

তবে প্রাথমিক পর্যায়ের শিশুদের ক্যালকুলেটর ব্যবহার আমরা অবশ্যই নিরুৎসাহিত করছি। কারণ প্রাথমিক পর্যায়ে শিশুদের মানসিক বিকাশের জন্য এবং গণনা ও গণিত শিক্ষার জন্য অন্যান্য প্রযুক্তি যেমন ভিডিও কন্টেন্ট, গণিত-বিষয়ক গান, ছড়া ইত্যাদি সহায়ক হলেও ক্যালকুলেটর ব্যবহার হতে পারে অন্তরক। কিন্তু মাধ্যমিক ও উচ্চ মাধ্যমিক পর্যায়ের ছাত্র-ছাত্রী যারা ইতিমধ্যে গণিত ও গণনার প্রাথমিক ধারণা লাভ করে এসেছে তাদের জন্য ক্যালকুলেটর সহায়ক ভূমিকা পালন করতে পারে। তাদের বিভিন্ন রকম গণনার কাজে এবং গণিত বুঝতে ClassWiz হয়ে উঠতে পারে শিক্ষার অন্যতম মাধ্যম।

এই বইয়ে ব্যবহৃত গণিতগুলো মাধ্যমিক ও উচ্চ মাধ্যমিক বিদ্যালয়ের পাঠ্যক্রমের অন্তর্গত। যেগুলোর মধ্যে রয়েছে সংখ্যা ও বীজগণিতের প্রাথমিক ধারণা থেকে শুরু করে ক্যালকুলাস, সম্ভাব্যতা ও পরিসংখ্যানের প্রাথমিক বিষয়সমূহ, সেই সঙ্গে আরও উচ্চতর বিষয়সমূহ যেমন ভেক্টর, ম্যাট্রিক্স ও জটিল সংখ্যা। আমরা আশা করছি পাঠকরাই সিদ্ধান্ত নিতে পারবে যে, কোন অধ্যায়টি তাদের উদ্দেশ্য পুরণের জন্য উপযুক্ত। যদিও গণিতের পাঠ্যসূচি বিভিন্ন দেশে বিভিন্ন রকম কিন্তু আমরা বিশ্বাস করি এই বইয়ের গাণিতিক ধারণাগুলো এই দেশের এবং সীমানা অতিক্রম করে দেশের বাইরের সকল বাংলা ভাষাভাষী গণিত শিক্ষক ও ছাত্র-ছাত্রীদের উপকারে আসবে।

এই বইয়ের প্রতিটি অধ্যায় ছাত্র এবং শিক্ষক প্রত্যেকের পাঠোপযুক্ত যা তাদের ClassWiz কিভাবে বিভিন্নরকম গণিতের সাথে সম্পর্কিত তা বুঝতে এবং এটি দক্ষতার সঙ্গে ব্যবহার করতে সহায়তা করবে। প্রতিটি অধ্যায় শেষে ওই অধ্যায়ের সাথে সম্পর্কিত গণিত নিয়ে অনুশীলনী সাজানো হয়েছে যা ক্যালকুলেটর ব্যবহারের দক্ষতা বাড়াতে সহায়তা করবে।

পরিশেষে, গ্রন্থটি প্রকাশের ক্ষেত্রে জড়িত সকলকে তাদের দক্ষতা ও আন্তরিকতার জন্য ধন্যবাদ।

গ্রন্থটি ছাত্র-ছাত্রী ও শিক্ষকমন্ডলী দ্বারা সমাদৃত হবে বলে আমরা আশা করি।

আগস্ট, ২০১৭
ঢাকা

লেখকবৃন্দ
কে.এম. আরিফুল কবীর
মো: আতেফ আরমান
মো: রাকিবুল হাসান
এম. এম. জামান

সূচিপত্র

অধ্যায়	পৃষ্ঠা নং
সংখ্যা ও তার উপস্থাপন **(Numbers and Their Representation)**	১
ফাংশন **(Function)**	২৪
বীজগাণিতিক রাশি **(Expression)**	৪৩
এক চলক বিশিষ্ট সমীকরণ **(One Variable Equation)**	৫১
সরল সহসমীকরণ **(Simultaneous Equation)**	৬১
অসমতা **(Inequality)**	৬৯
সূচকীয় ও লগারিদমীয় ফাংশন **(Logarithm and Indices)**	৭৪
অনুক্রম ও ধারা **(Sequence and Series)**	৮৭
ত্রিকোণমিতি **(Trigonometry)**	৯৭
ম্যাট্রিক্স **(Matrices)**	১০৮
ভেক্টর **(Vector)**	১১৭
ক্যালকুলাস **(Calculus)**	১২৪
স্প্রেডশীট **(Spreadsheet)**	১৩১
পরিসংখ্যান **(Statistics)**	১৪১

কৃতজ্ঞতা

ব্যাকবন লিমিটেড

বাংলাদেশ গণিত সমিতি

Casio Computer Co., Ltd.

মূল্যঃ ২৫০ টাকা মাত্র

প্রথম অধ্যায়

সংখ্যা ও তার উপস্থাপন

(Numbers and Their Representation)

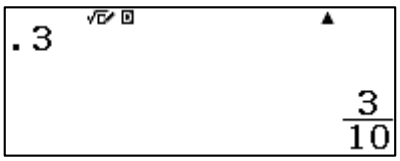
সংখ্যার ইতিহাস মানব সভ্যতার ইতিহাসের মতোই প্রাচীন। জীবনের প্রতিটি ক্ষেত্রে সংখ্যার ভূমিকা অপরিসীম। সংখ্যার ব্যবহার ছাড়া আমরা এক মুহূর্ত চলতে পারিনা। বিভিন্ন রকম সংখ্যা ও তাদের মধ্যেকার সম্পর্ক বিষয়ে সকলের ধারণা থাকা উচিৎ। এ অধ্যায়ে ClassWiz ব্যবহার করে নিম্নোক্ত বিষয়গুলো আলোচনা করা হবে-

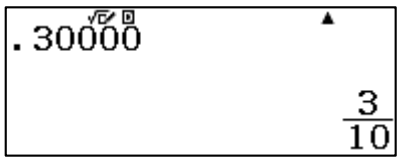
- দশমিক সংখ্যার উপস্থাপন
- ভগ্নাংশের উপস্থাপন
- শতাংশ
- আবৃত্ত দশমিক সংখ্যা
- সূচকীয় সংখ্যা
- সংখ্যার উৎপাদক নির্ণয়
- যৌগিক এবং মৌলিক সংখ্যা নির্ণয়
- ল. সা. গু. এবং গ. সা. গু. নির্ণয়
- সংখ্যাকে বৈজ্ঞানিক রূপে উপস্থাপন
- মূল নির্ণয়
- মূলদ ও অমূলদ সংখ্যা নির্ণয়
- বিভিন্ন ভিত্তি যুক্ত সংখ্যার (Decimal, Binary, Hexadecimal, Octal) গণনা।
- জটিল সংখ্যার গণনা
- বিভিন্ন রকম বৈজ্ঞানিক ধ্রুবকের মান নির্ণয় ও
- পরিমাপের একক সমূহের রূপান্তর

এই অধ্যায়ে Calculate *mode* ব্যবহার করা হবে, যা [MENU] [1] চেপে করা যায়। ইনপুট ও আউটপুটের জন্য ক্যালকুলেটরটিকে Math *mode* ও Norm 2 তে রাখতে হবে। এজন্য *SET UP* ([SHIFT] [MENU]) ব্যবহার করতে হয়।

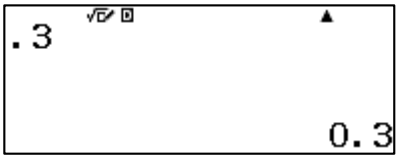
১.১ দশমিক সংখ্যার উপস্থাপন

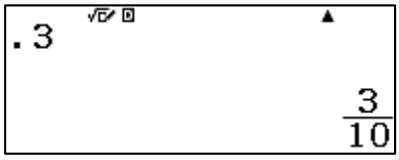
ক্যালকুলেটরে একটি দশমিক সংখ্যা প্রবেশ করিয়ে [=] চাপলে ক্যালকুলেটর সাধারণত এটিকে ভগ্নাংশ আকারে প্রদর্শন করে। যা নিচের স্ক্রিনে দেখানো হলো-



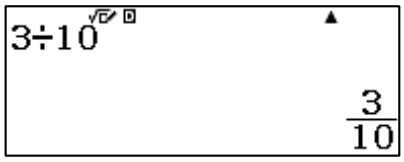


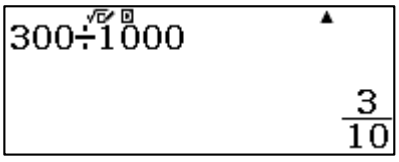
প্রাপ্ত ফলাফলকে দশমিক সংখ্যায় নেওয়ার প্রয়োজন পরলে [S⇔D] বাটন চাপতে হবে। যা সংখ্যাটিকে ভগ্নাংশ (standard) থেকে দশমিক সংখ্যায় (Decimal) প্রকাশ করবে। পুনরায় [S⇔D] কী চাপলে সংখ্যাটি ভগ্নাংশ আকারে প্রদর্শিত হবে। নিচে দুইটি স্ক্রিনে [S⇔D] বাটন চাপার মাধ্যমে উপরের রাশিটির ভগ্নাংশ ও দশমিক সংখ্যায় উপস্থাপন দেখানো হলো-

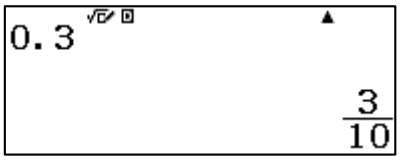




0.3 এবং 0.30000 একই সংখ্যা এবং দুটি সংখ্যাই একই ভগ্নাংশ, দশ ভাগের তিন ভাগ দ্বারা উপস্থাপিত হয়েছে। এই একই সংখ্যাকে আরও বিভিন্ন উপায়ে উপস্থাপন করা যায়। যা নিচে দেখানো হলো-



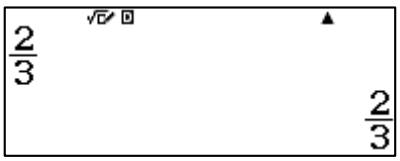


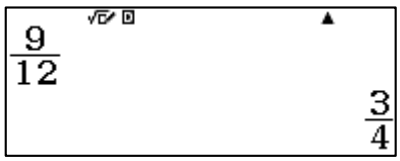


দশমিক সংখ্যায় ফলাফল সরাসরি পাওয়ার জন্য প্রথমে [SHIFT] ও পরে [=] বাটন চাপলে সংখ্যাটি দশমিক আকারে সরাসরি প্রদর্শিত হবে (লক্ষণীয়যে [=] কী এর উপর আসন্ন মানের জন্য ≈ চিহ্ন আছে।)

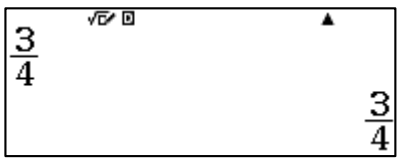
১.২ ভগ্নাংশের উপস্থাপন

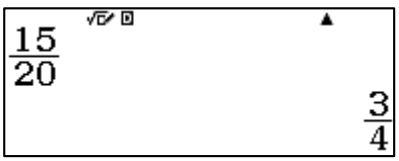
[▭/▭] কী ব্যবহার করে ভগ্নাংশকে ক্যালকুলেটরে প্রবেশ করানো যায় এবং [=] বাটন চাপলে ভগ্নাংশ আকারেই তা প্রদর্শিত হয়। কোনো ভগ্নাংশ সরল আকারে $\left(\frac{2}{3}\right)$ থাকলে [=] বাটন চাপলে অনুরূপভাবেই তা প্রদর্শিত হবে। কিন্তু যদি ভগ্নাংশটিকে আরও সরল আকারে উপস্থাপন করা সম্ভব হয় তাহলে ক্যালকুলেটর স্বয়ংক্রিয়ভাবে সরল আকারেই ভগ্নাংশটিকে উপস্থাপন করবে। যেমন $\frac{9}{12}$ কে সরল আকারে $\frac{3}{4}$ হিসেবে প্রদর্শন করবে। নিচের স্ক্রিনে এটি দেখানো হলো-

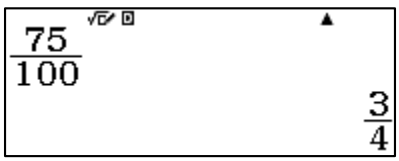


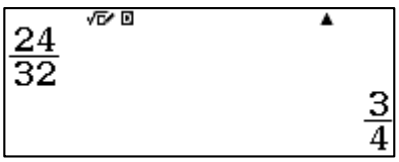


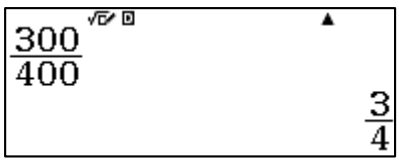
আরো অনেক রকম ভগ্নাংশ আছে যাদেরকে সরল আকারে উপস্থাপন করলে ফলাফল হয় $\frac{3}{4}$ নিচে এরকম পাঁচটি উদাহরণ দেওয়া হলো-





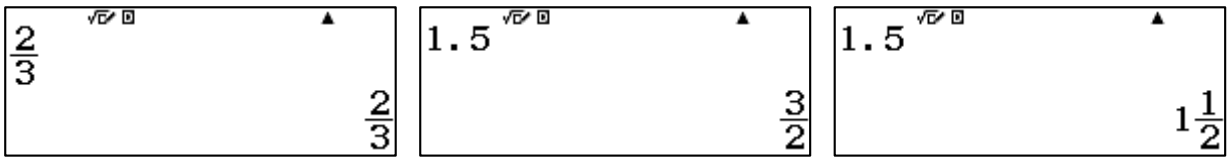






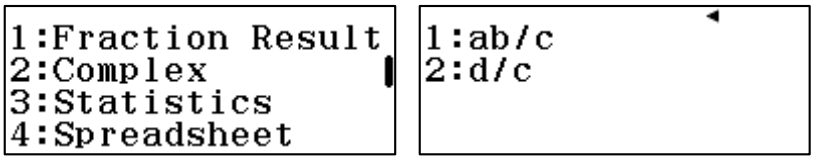
যখন দশমিক সংখ্যা 1 এর চেয়ে বড় হয়, তখন উক্ত ভগ্নাংশে লব হরের চেয়ে বড় হবে। একে অপ্রকৃত ভগ্নাংশ বলে। আবার ভগ্নাংশের হর যদি লবের চেয়ে বড় হয় তখন তাকে প্রকৃত ভগ্নাংশ বলে। নিচের প্রথম স্ক্রিনে একটি প্রকৃত ভগ্নাংশ

দেখানো হয়েছে। অপ্রকৃত ভগ্নাংশকে দুইটি ভিন্ন উপায়ে আদর্শরূপে দেখানো যায়। 1.5 কে দুইটি পদ্ধতিতেই নিচের স্ক্রিনে দেখানো হলো-



প্রত্যেকটি পদ্ধতিই 1.5 কে ভগ্নাংশ আকারে দেখানোর জন্য সঠিক। প্রথমটি অপ্রকৃত ভগ্নাংশ, যার লব হরের চেয়ে বড়। দ্বিতীয়টি হচ্ছে মিশ্র ভগ্নাংশ। SHIFT S⇔D চাপার মাধ্যমে $\left(a\frac{b}{c} \longleftrightarrow \frac{d}{c}\right)$ নির্দেশনা ব্যবহার করে এক পদ্ধতি থেকে অন্য পদ্ধতিতে রূপান্তর সম্ভব।

ক্যালকুলেটরে স্বয়ংক্রিয়ভাবে ভগ্নাংশ উপস্থাপন করার জন্য SHIFT MENU চেপে ▼ কী ব্যবহার করে দ্বিতীয় স্ক্রিনে যেতে হবে। এরপর Fraction Result এর জন্য 1 চাপতে হবে। বিভিন্ন রকম ভগ্নাংশের জন্য 1 চেপে $1: ab/c$ এবং 2 চেপে $2 : d/c$ নির্বাচন করতে হবে, যা নিচে দেখানো হলো-



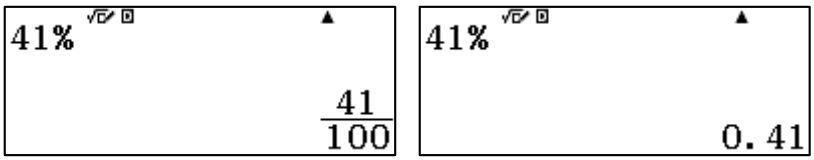
ক্যালকুলেটর সব সময় দশমিক সংখ্যাকে ভগ্নাংশে প্রকাশ করে না। যদি সংখ্যাটির সবচেয়ে সরল ভগ্নাশের হর চার অংকের বেশি হয় তাহলে এটি স্বয়ংক্রিয়ভাবে দশমিক সংখ্যা প্রদর্শন করবে। উদাহরণ হিসেবে ধরা যাক, একটি দশমিক সংখ্যা .123457, যাকে ভগ্নাংশ আকারে প্রকাশ করলে হর অনেক বড় হবে।

$$0.123457 = \frac{123457}{1000000}$$

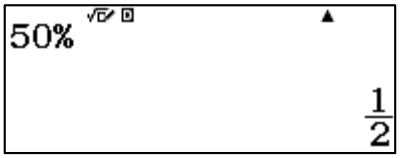
ক্যালকুলেটরে এই দশমিক সংখ্যাকে প্রবেশ করানোর পর S⇔D বাটন চাপলেও এটি ভগ্নাংশে পরিণত হবে না।

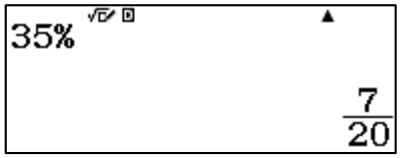
১.৩ শতাংশ

শতাংশ একটি বিশেষ ধরনের ভগ্নাংশ যার হর 100. সুতরাং $\frac{41}{100}$ কে সংক্ষিপ্ত আকারে লেখার পদ্ধতি হচ্ছে 41%, যা .41 এর সমতুল্য। SHIFT Ans চাপার মাধ্যমে শতাংশ (%) চিহ্ন প্রবেশ করানো যায়। নিচের স্ক্রিনের দিকে ভালো করে লক্ষ্য করলে দেখা যাবে যে, 41% এর আদর্শ উপস্থাপন পদ্ধতি হলো ভগ্নাংশ আকারে উপস্থাপন। কিন্তু S⇔D বাটন চাপার মাধ্যমে সংখ্যাটিকে দশমিক আকারেও দেখা যায়।

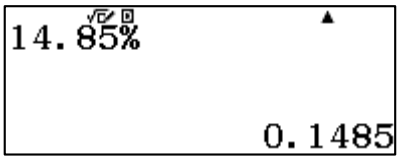


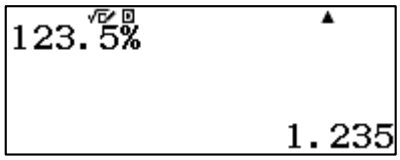
কোনো কোনো সংখ্যার শতাংশ তার সমতুল্য ভগ্নাংশ আকারে উপস্থাপিত হলে সংখ্যাটির হর 100 ছাড়া অন্য সংখ্যা হয়ে থাকে, যা নিচের স্ক্রিনে দেখানো হলো। ক্যালকুলেটর সরাসরি কোনো সংখ্যাকে শতাংশ আকারে প্রকাশ করে না।



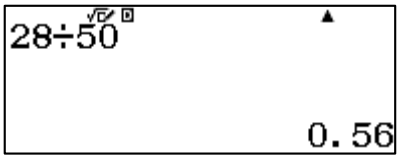


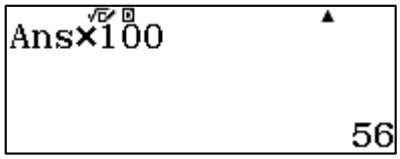
নিচের স্ক্রিনের দিকে লক্ষ্য করলে অনুধাবন করা যায় যে, কীভাবে শতাংশ ও দশমিক সংখ্যা সম্পর্কযুক্ত-





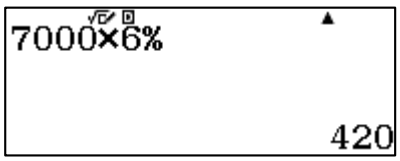
শতাংশ চিহ্নযুক্ত সংখ্যাটি তার সমতুল্য দশমিক সংখ্যার চেয়ে সবসময় 100 গুণ বড় (কেননা শতাংশ হলো এমন একটি ভগ্নাংশ যার হর 100)। সুতরাং কোনো সংখ্যাকে শতাংশ আকারে প্রকাশ করার জন্য প্রথমে একে দশমিক সংখ্যায় প্রকাশ করে তারপর 100 দ্বারা গুণ করতে হবে।

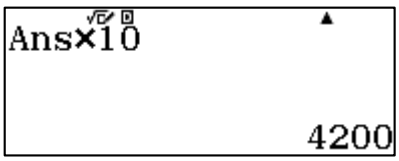


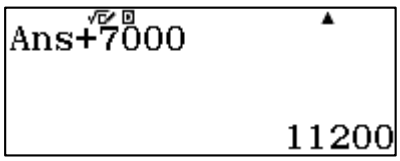


উপরের উদাহরণে দেখা যাচ্ছে যে, 28 সংখ্যাটি 50 এর 56 শতাংশ।

আরেকটি উদাহরণ ধরা যাক, জামান সাহেব ব্যাংকে 7000 টাকা জমা রাখলেন। ব্যাংকের মুনাফার হার 6% । তাহলে 10 বছর শেষে তিনি মুনাফা আসলে কত টাকা পাবেন তা বের করার জন্য প্রথমে 1 বছরের মুনাফা নিচের প্রথম স্ক্রিনের মতো বের করে নিতে হবে। নিচের প্রথম স্ক্রিন থেকে দেখা যাচ্ছে যে 1 বছরের মুনাফা 420 টাকা।



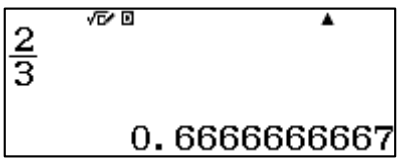


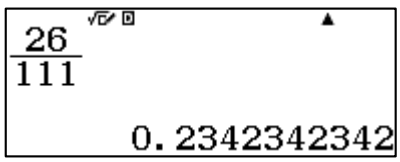


উপরের দ্বিতীয় স্ক্রিন হতে দেখা যাচ্ছে যে 10 বছরের মুনাফা 4200 টাকা। এর সাথে মূলধন 7000 টাকা যোগ করলেই 10 বছর শেষে মুনাফা আসলের পরিমাণ পাওয়া যাবে যা তৃতীয় স্ক্রিনে দেখানো হয়েছে। সুতরাং 10 বছর শেষে মুনাফা আসলের পরিমাণ 11200 টাকা।

১.৪ আবৃত্ত দশমিক সংখ্যা

অনেক সময় দেখা যায় যে, কিছু কিছু ভগ্নাংশকে দশমিক সংখ্যা হিসেবে উপস্থাপন করতে ক্যালকুলেটরের সম্পূর্ণ ডিসপ্লের প্রয়োজন পরে। যদি গ ও সংখ্যাটি এতেও শেষ হয় না। এর কারণ হলো এসব সংখ্যার বেশীর ভাগই আবৃত্ত দশমিক সংখ্যা যাদের দশমিকের ডানদিকে একটি অঙ্ক ক্রমান্বয়ে বার বার বা একাধিক অঙ্ক পর্যায়ক্রমে বারবার আসে এবং পৌনঃপুনিকতা অসীম। নিচের দুইটি উদাহরণ দেওয়া হলো-

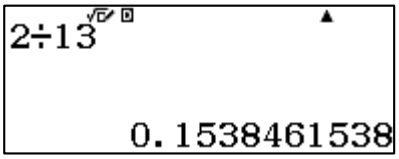




সংখ্যা উপস্থাপনের জন্য ক্যালকুলেটরে নির্দিষ্ট সংখ্যক স্থান থাকায় অসীম দশমিক সংখ্যাকে সম্পূর্ণরূপে উপস্থাপন করতে পারে না। উপরের উদাহরণ দুইটি থেকে খুব সহজেই বোঝা যায় কীভাবে অঙ্কগুলোর পুনরাবৃত্তি হচ্ছে। আবৃত্ত বা পৌনঃপুনিক দশমিক ভগ্নাংশে যে অংশ বার বার অর্থাৎ পুনঃ পুনঃ আবির্ভূত হয়, একে আবৃত্ত অংশ বলে। আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশে একটি অঙ্ক আবৃত্ত হলে, সেই অঙ্কের উপর পৌনঃপুনিক বিন্দু এবং একাধিক অঙ্ক আবৃত্ত হলে কেবলমাত্র প্রথম ও শেষ অঙ্কের উপর পৌনঃপুনিক বিন্দু দেওয়া হয়। এক্ষেত্রে উপরের দুইটি সংখ্যাকে নিম্নোক্তভাবে দেখানো যায়-

$$\frac{2}{3} = 0.\dot{6} \text{ এবং } \frac{26}{111} = 0.\dot{2}3\dot{4}$$

ClassWiz ক্যালকুলেটরে পৌনঃপুনিক চিহ্ন দেখায় না। কিছু ক্ষেত্রে উপরের উদাহরণ দুইটির মতো এত সহজে বোঝা যায় না যে সংখ্যাটি আবৃত্ত দশমিক সংখ্যা। এখানে এমন সংখ্যার উদাহরণ দেওয়া হলো-

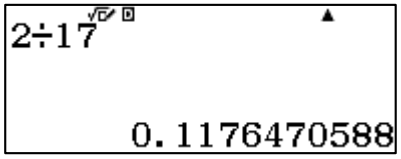


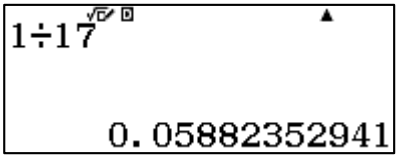
এই দুইটি উদাহরণের প্রথমটি যে আবৃত্ত তা সহজেই বোঝা যায়। কিন্তু দ্বিতীয়টি বোঝা যায় না। কেননা ডিসপ্লেতে কিছু সংখ্যক অঙ্ক (1538) এর পুনরাবৃত্তি দৃশ্যমান যা থেকে বোঝা যায় যে সংখ্যাটির দশমিক উপস্থাপন হলো-

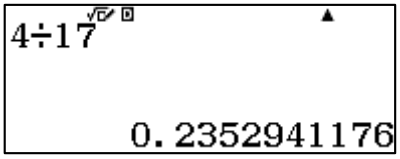
$$\frac{2}{13} = 0.153846153846153846153846 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= 0.\dot{1}5384\dot{6}$$

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে কোনো অঙ্কেরই পুনরাবৃত্তি দৃশ্যমান নয়। কিন্তু অঙ্কগুলোর বিন্যাস দেখার জন্য একই হর 17 বিশিষ্ট আরো কিছু সংখ্যার বিশ্লেষণ করতে হবে, যা নিচের স্ক্রিনে দেখানো হলো-





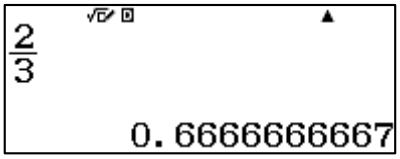


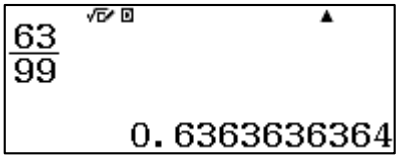
ভালোভাবে $\frac{2}{17}, \frac{1}{17}$ ও $\frac{4}{17}$ উদাহরণ তিনটির দিকে লক্ষ্য করলে পুনরাবৃত্তিমূলক অঙ্কগুলোর বিন্যাস সম্পর্কে ধারণা পাওয়া যাবে যা ক্যালকুলেটরের স্ক্রিনের তুলনায় অনেক অনেক বড়।

$$\frac{2}{17} = 0.11764705882352941176470588235294117 6 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= 0.\dot{1}17647058823529\dot{4}$$

ক্যালকুলেটরের স্ক্রিনে উপস্থাপনের জন্য কোনো কোনো আবৃত্ত দশমিক সংখ্যার আসন্ন মান দেখানো হয়। এই কারণে প্রদর্শিত অঙ্কগুলোর দিকে লক্ষ্য রাখতে হয়। এখানে দুইটি উদাহরণ দেওয়া হলো যাদের আসন্ন মান ক্যালকুলেটরে প্রদর্শিত হয়েছে-





এক্ষেত্রে সঠিক সংখ্যাটি হলো -

$$\frac{2}{3} = 0.6666666666666666666 \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

$$= 0.\dot{6}$$

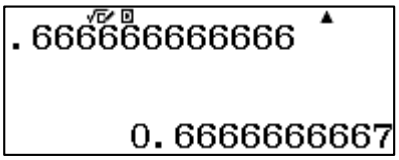
এবং $$\frac{63}{99} = 0.636363636363636366363 \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots.$$

$$= 0.\dot{6}\dot{3}$$

আবৃত্ত দশমিক থেকে ভগ্নাংশে রূপান্তরের সময় আসন্ন মানের দিকে দৃষ্টি রাখা প্রয়োজন। এই ক্যালকুলেটরে দশমিকের পরে দশ ঘর প্রদর্শন করে। উদাহরণস্বরূপ, .666666666666 সংখ্যাটি (12 দশমিক স্থান পর্যন্ত) প্রবেশ করিয়ে [=] বাটন চাপা হলে ক্যালকুলেটরে নিচের দশমিক সংখ্যার মতো সংখ্যাটিকে বিবেচনা করবে।

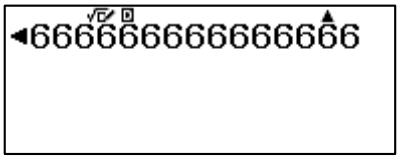
$$.66666666666666 = \frac{2}{3}$$

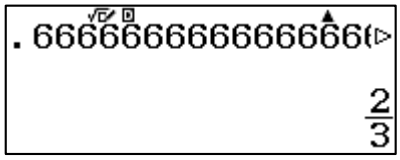
আর তাই সংখ্যাটির দশ দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান নিচের মতো করে প্রদর্শন করবে।



এটি পুরোপুরি সঠিক কেননা যে দশমিক সংখ্যাটি প্রবেশ করানো হয়েছে তা আবৃত্ত দশমিক সংখ্যা নয়। (সংখ্যাটি বার দশমিক সংখ্যা পর্যন্ত নির্দিষ্ট।)

আবৃত্ত দশমিক সংখ্যার দশমিকের পরে আরো অঙ্ক প্রবেশ করানো যায় যদিও সম্পূর্ণ সংখ্যাটি ক্যালকুলেটর প্রদর্শন করে না, যা নিচের প্রথম স্ক্রিনে দেখানো হয়েছে। লক্ষণীয়যে সংখ্যাটির বামপাশে একটি তীর চিহ্ন আছে যা সংখ্যাটির নিরন্তরতা নির্দেশ করে। এরপর [=] বাটন চাপা হলে ক্যালকুলেটর এবার সংখ্যাটিকে আবৃত্ত দশমিক $(.\dot{6})$ হিসেবে গণ্য করবে। যার ভগ্নাংশ হবে $\frac{2}{3}$ ।

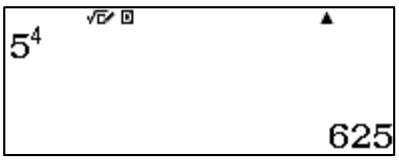




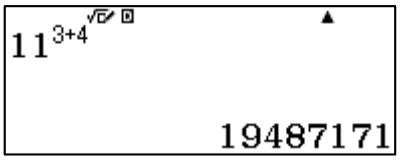
নিচের দ্বিতীয় স্ক্রিনের ডানপাশের তীর চিহ্নটি লক্ষণীয়।

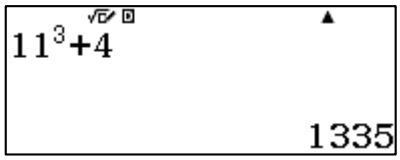
১.৫ সূচকীয় সংখ্যা

কোনো সংখ্যাকে ঐ সংখ্যা দ্বারা বার বার গুণ করার মাধ্যমে সূচকীয় সংখ্যার উদ্ভব হয়।। সুতরাং, $5 \times 5 \times 5 \times 5$ কে বলা হয় 5 এর চতুর্ঘাত অর্থাৎ 5^4। ক্যালকুলেটরে সূচকীয় সংখ্যার গণনা করার জন্য [$x^{\blacksquare}$] বাটন রয়েছে। এটি ব্যবহার করার জন্য প্রথমে ভিত্তি 5 প্রবেশ করিয়ে [$x^{\blacksquare}$] বাটনটি চেপে তারপর ঘাতের মান 4 মান প্রবেশ করাতে হয়। [=] বাটন চাপলে নিচের মতো করে ফলাফল পাওয়া যাবে।



কোনো সূচক একাধিক সংখ্যা বিশিষ্ট হয়ে থাকলেও এটি সরাসরি ক্যালকুলেটরে প্রবেশ করানো যায়। উদাহরণস্বরূপ, নিচের প্রথম স্ক্রিনের দিকে ভালো করে লক্ষ্য করলে দেখা যাবে যে, 11 এর ঘাত $3+4$.

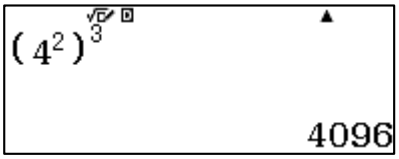




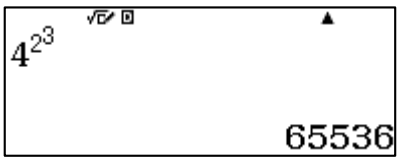
ক্যালকুলেটরে সূচকীয় গণনা করার জন্য ▶ কী ব্যবহার করে ভিত্তি থেকে ঘাতে এবং পুনারায় ঘাত থেকে ভিত্তিতে গিয়ে রাশিটি টাইপ করতে হবে। উপরে লক্ষ্য করলে দেখা যাবে যে, 11^{3+4} ও 11^3+4 রাশি দুটি সম্পূর্ণ আলাদা। প্রথম রাশিতে 4 সূচকের সাথে যোগ করা হয়েছে। আর দ্বিতীয় রাশিতে $4, 11^3$ এর সাথে যোগ করা হয়েছে।

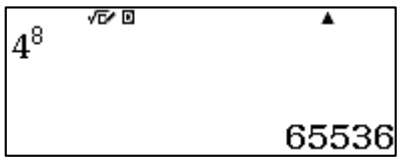
প্রথম রাশিটির অর্থ হলো $11\times11\times11\times11\times11\times11\times11$ যেখানে দ্বিতীয় রাশিটির অর্থ হলো $11\times11\times11+4$ যেগুলো অবশ্যই একটি অপরটি থেকে আলাদা।

কোনো ঘাত বিশিষ্ট সংখ্যার উপর ঘাত থাকলে তা ক্যালকুলেটরে সরাসরি বের করা যায়। উদাহরণস্বরূপ ধরা যাক, 4^2 এর তিনতম ঘাত হলো $4^2\times4^2\times4^2$ যা $(4^2)^3$ এভাবে লিখা যায় । অবশ্যই সতর্কতার সঙ্গে বন্ধনী প্রবেশ করাতে হবে এবং পরবর্তী ঘাত প্রবেশ করানোর জন্য ▶ বাটন ব্যবহার করতে হবে। এটি নিচে দেখানো হলো-



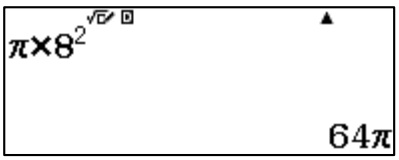
প্রাপ্ত ফলাফলটি 4^6 এর মানের সমান। কেননা ঘাতগুলো যোগ করলে পাওয়া যায় $2+2+2=6$। আরও লক্ষণীয় যে $2+2+2=3\times2=6$. আরও দেখা যায় যে $(4^2)^3$ ও $(4^3)^2$ একই ফলাফল দেয় কেননা $2\times3=3\times2=6$। যদি ব্র্যাকেট না দেয়া হয় তাহলে ক্যালকুলেটর শেষের ঘাতটিকে তার পূর্বের সংখ্যার ঘাত হিসেবে বিবেচনা করবে। তাই নিচের রাশিটি যা [$x^{\blacksquare}$] কী পরপর দুই বার ব্যবহার করে পাওয়া গেছে তার মান হবে 4 এর 2^3 বা 8 তম ঘাত এর মান।



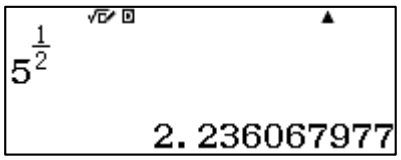


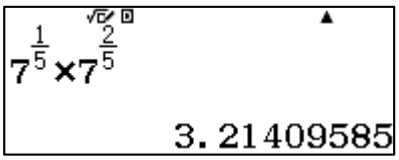
যদিও সব সময় [$x^{\blacksquare}$] বাটন ব্যবহার করে ঘাত বের করা যায়, কিন্তু দ্বিঘাতের জন্য [x^2] বাটন ও ত্রিঘাতের জন্য [SHIFT] [x^2] (x^3) বাটন ব্যবহার করা অধিক সুবিধাজনক। এই নির্দেশনাগুলোও ঘাত বাটন [$x^{\blacksquare}$] এর মতো একই ফলাফল দেয়। (যদিও ক্যালকুলেটর তাদের একটু ভিন্ন ভাবে গণনা করে)।

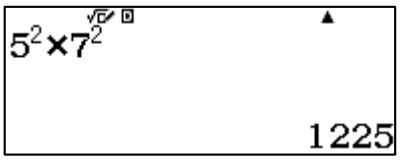
ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে [x^2] বাটন সরাসরি ব্যবহার করা যায়। নিচের স্ক্রিনে $8cm$ ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের ক্ষেত্রফল সরাসরি বের করা হয়েছে। নিচের স্ক্রিনে [SHIFT] [×10ˣ] চেপে π ব্যবহার করা হয়েছে।



ক্যালকুলেটরের মাধ্যমে পূর্ণ সংখ্যা ছাড়াও ভগ্নাংশযুক্ত ঘাতবিশিষ্ট সংখ্যাগুলোর মান সরাসরি বের করা যায়। এজন্য প্রথমে ভিত্তি প্রবেশ করিয়ে [x■] কী এর পর [▭] কী ব্যবহার করতে হয়।





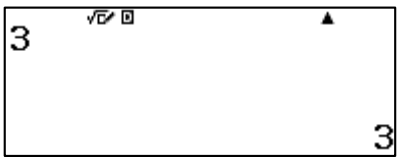


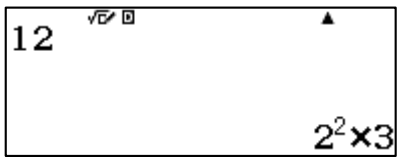
দ্বিতীয় স্ক্রিনের জন্য (▶) খুব সাবধানতার সাথে ব্যবহার করতে হবে।

দ্বিতীয় স্ক্রিনে লক্ষণীয় যে, একই ভিত্তিযুক্ত সংখ্যাগুলো গুণনের সময় ঘাতগুলো যোগ হয়েছে। অর্থাৎ, $7^{\frac{1}{5}} \times 7^{\frac{2}{5}} = 7^{\frac{1}{5}+\frac{2}{5}} = 7^{\frac{3}{5}} = \cdots$ এখানে দেখা যাচ্ছে যে, সংখ্যা দুটির ভিত্তি এক কিন্তু ঘাতগুলো ভিন্ন। এক্ষেত্রে ঘাতগুলো যোগ করা হয়েছে। তৃতীয় স্ক্রিনে দেখা যাচ্ছে যে, $5^2 \times 7^2 = (5 \times 7)^2 = 35^2 = 1225.$ এখানে দেখা যাচ্ছে যে, সংখ্যাটি দুটির ভিত্তি ভিন্ন কিন্তু ঘাত একই। এক্ষেত্রে ভিত্তিগুলোকে গুণ করে তার উপর ঘাত দেয়া হয়েছে।

১.৬ সংখ্যার উৎপাদক

কোনো একটি পূর্ণ সংখ্যাকে যেসকল পূর্ণ সংখ্যা দ্বারা ভাগ করা যায়, তাদেরকে প্রথমোক্ত পূর্ণসংখ্যার উৎপাদক বলে। উদাহরণস্বরূপ, 12 এর উৎপাদকসমূহ হলো $1, 2, 3, 4, 6$ এবং 12। সব পূর্ণ সংখ্যারই কমপক্ষে দুইটি উৎপাদক থাকে। যে সকল পূর্ণ সংখ্যার 2 এর অধিক উৎপাদক থাকে তাদের যৌগিক সংখ্যা বলা হয়। অন্য দিকে যাদের মাত্র দুইটি উৎপাদক থাকে; একটি হলো সংখ্যাটি নিজে এবং অন্যটি 1, এই ধরনের সংখ্যাকে মৌলিক সংখ্যা বলে। ক্যালকুলেটরে একটি বিশেষ নির্দেশনা আছে যা কোনো সংখ্যাকে তার মৌলিক উৎপাদকের গুণিতক রূপে উপস্থাপন করে। এটি হলো FACT। কোনো সংখ্যার উৎপাদক বের করার জন্য প্রথমে সংখ্যাটি ক্যালকুলেটরে প্রবেশ করিয়ে [=] চাপতে হবে। এরপর [SHIFT] [°'''] বাটন চাপলে নিচের মতো করে সংখ্যাটির উৎপাদক পাওয়া যাবে। FACT ([SHIFT] [°''']) ব্যবহার করে আমরা খুব সহজেই মৌলিক ও যৌগিক সংখ্যার পার্থক্য করতে পারি।

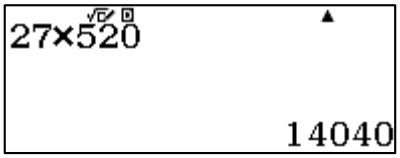


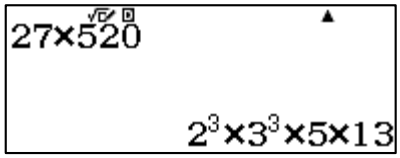


উপরের স্ক্রিনে দেখা যাচ্ছে যে, 3 এর মৌলিক উৎপাদক শুধু 3 কিন্তু 12 এর উৎপাদকগুলো $2^2, 3;\ 2^2 = 4, 2 \times 3 = 6, 4 \times 3 = 12$ যা থেকে বোঝা যায় যে, 3 একটি মৌলিক সংখ্যা। কিন্তু 12 একটি যৌগিক সংখ্যা। যেহেতু 1 মৌলিক সংখ্যা নয়, তাই এটি মৌলিক উৎপাদকের অন্তর্ভূক্ত নয়। যেকোনো ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যাকে একটি অনন্য মৌলিক সংখ্যার গুণিতকের সেট দ্বারা প্রকাশ করা যায়।

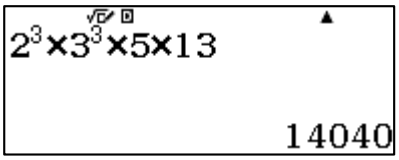
প্রথম কয়েকটি মৌলিক সংখ্যা হলো $2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots \ldots \ldots \ldots$

যেমন প্রথম স্ক্রিনে দুইটি পূর্ণ সংখ্যার গুণন প্রক্রিয়া দেখানো হয়েছে যার ফল 14040। ফলাফল পাওয়ার পর [SHIFT] [°'''] চেপে FACT নির্দেশনা দিলে সংখ্যাটির মৌলিক উৎপাদকগুলো দ্বিতীয় স্ক্রিনের মতো দেখা যাবে।

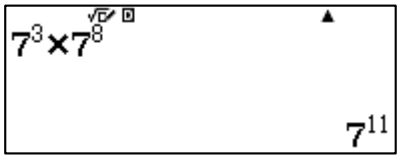


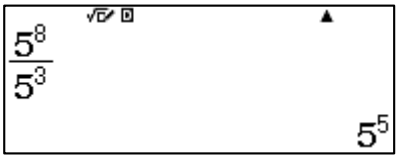


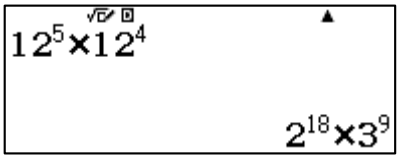
উৎপাদকে বিশ্লেষণকে যাচাই করার জন্য, এই মৌলিক উৎপাদকের গুণিতকগুলোকে গুণ করা হলো-



ভাগ বা গুণ করা হলে কীভাবে পূর্ণ সংখ্যার ঘাত বিশিষ্ট সংখ্যাগুলোকে একত্রিত করা যায় তা এই $FACT$ নির্দেশনা ব্যবহার করে পাওয়া যায়।এটি নিচে দেখানো হলো-

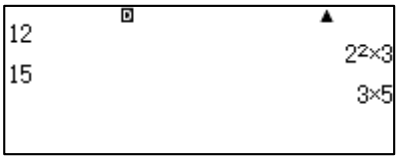




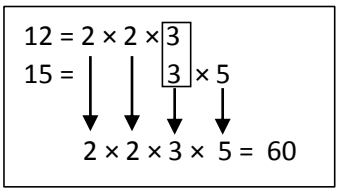


উপরের প্রথম ও তৃতীয় স্ক্রিন লক্ষ্য করলে দেখা যাবে যে, যদিও প্রথম স্ক্রিনে $7^3 \times 7^8$ কে 7^{11} আকারে প্রদর্শন করেছে, কিন্তু ক্যালকুলেটর $12^5 \times 12^4$ কে 12^9 হিসেবে প্রদর্শন না করে বরং তার মৌলিক উৎপাদক 2 ও 3 এর মাধ্যমে সংখ্যাটিকে প্রদর্শন করেছে। কারণ 12 নিজে মৌলিক সংখ্যা নয়, কিন্তু 7 একটি মৌলিক সংখ্যা।

দুইটির সংখ্যার ল.সা.গু (লঘিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক) এবং গ. সা. গু (গরিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক) বের করার জন্য FACT সুবিধা ব্যবহার করা যায়। যেমন, 12 এবং 15 এর ল.সা. গু এবং গ.সা.গু বের করতে হবে। । এরপর 12 এবং 15 এর মৌলিক উৎপাদগুলো FACT ব্যবহার করে নিচের মতো বের করা হলো-

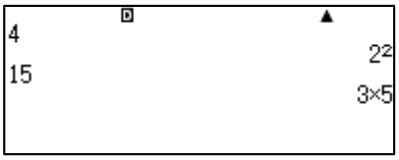


উপরের স্ক্রিন থেকে দেখা যাচ্ছে 12 এর মৌলিক উৎপাদক $2, 2, 3$ এবং 15 এর মৌলিক উৎপাদক $3, 5$। সুতরাং 12 ও 15 এর ল.সা.গু হবে $2 \times 2 \times 3 \times 5 = 60$।

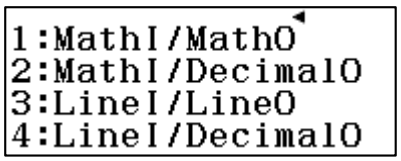


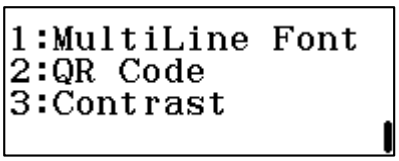
আবার দেখা যাচ্ছে যে, 3 সংখ্যাটি 12 এবং 15 উভয়ের সাধারণ উৎপাদক। সুতরাং গ.সা.গু হবে 3।

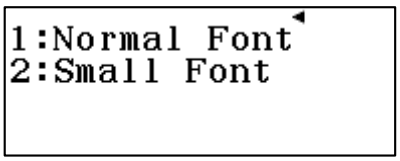
আরো ভালোভাবে বোঝার জন্য 4 ও 15 এর ল.সা.গু ও গ.সা.গু বের করা হলো-



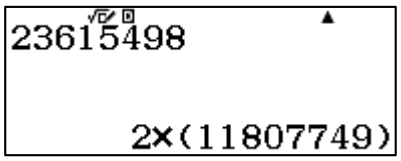
উপরের স্ক্রিনে দেখা যাচ্ছে, 4 এর মৌলিক উৎপাদক 2×2 এবং 15 এর মৌলিক উৎপাদক 3×5। সুতরাং ল. সা.গু হবে $2 \times 2 \times 3 \times 5 = 60$। আবার 4 ও 15 এর মাঝে কোনো সাধারণ উৎপাদক নেই। তাই গ.সা.গু হবে 1। এখানে একই স্ক্রিনে দুইটি সংখ্যার মৌলিক উৎপাদক বের করার জন্য Multiline font এবং ইনপুট ও আউটপুট হিসেবে LineI/ LineO *mode* ব্যবহার করা হয়েছে। এ জন্য প্রথমে [SHIFT] [MENU] চেপে [1] চাপতে হবে। এরপর [3] চেপে LineI/ LineO *mode* নির্বাচন করতে হবে। আবার [SHIFT] [MENU] চেপে ▼কী চাপার মাধ্যমে তৃতীয় স্ক্রিনে গিয়ে [1] চেপে Multiline font নির্বাচন করতে হবে। এরপর [2] চাপলে Small Font অন হবে।

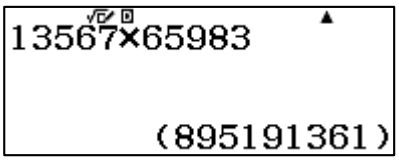


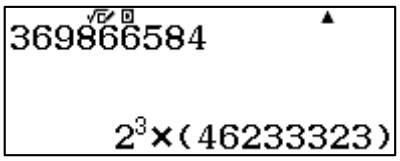




অনেক বড় বড় সংখ্যাকে তাদের মৌলিক সংখ্যার উৎপাদক আকারে প্রকাশ করা বেশ কঠিন। ক্যালকুলেটরও এই ধরনের বড় সংখ্যাকে মৌলিক উৎপাদকের গুণফল আকারে প্রকাশ করতে পারে না। নিচে FACT নিদের্শনা ব্যবহার করে তিনটি বড় সংখ্যার উদাহরণ দেখানো হলো-







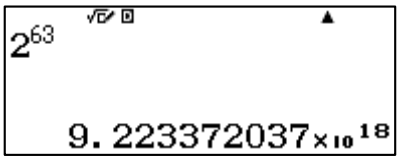
উপরের প্রথম উদাহরণে ক্যালকুলেটর 23615498 সংখ্যাটির সকল মৌলিক উৎপাদক দেখাতে পারেনি। কেননা 11807749 সংখ্যাটি মৌলিক কিনা তা নির্ধারণ করতে ব্যর্থ হয়েছে। দ্বিতীয় স্ক্রিনে দেখা যাচ্ছে ক্যালকুলেটর 895191361 এর কোনো মৌলিক উৎপাদকই দেখাতে পারেনি। যদিও এটি দুটি বড় সংখ্যার গুণফল। তৃতীয় স্ক্রিনে দেখা যাচ্ছে যে 369866584 সংখ্যাটিতে মৌলিক উৎপাদক 2 তিনবার আছে, কিন্তু ক্যালকুলেটর 46233323 সংখ্যাটি মৌলিক কিনা তা নির্ধারণে ব্যর্থ হয়েছে। যা পুনরায় বন্ধনীর মাধ্যমে দেখানো হয়েছে।

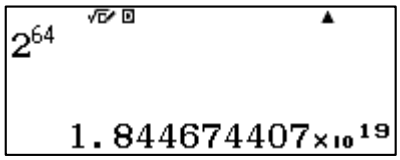
বন্ধনীর ভিতরের সংখ্যাটি মৌলিক সংখ্যাও হতে পারে আবার যৌগিক সংখ্যাও হতে পারে। কোনটি সত্য তা ক্যালকুলেটর নির্ণয় করতে পারে না।

অনুরূপভাবে যদি কোনো সংখ্যা এতটা বড় হয় যে তা উপস্থাপনের জন্য Scientific notation এর প্রয়োজন পড়ে তাহলেও ক্যালকুলেটর সংখ্যাটির মৌলিক গুণিতক সমূহ প্রদর্শন করতে পারবে না।

১.৭ সংখ্যার বৈজ্ঞানিক রূপ

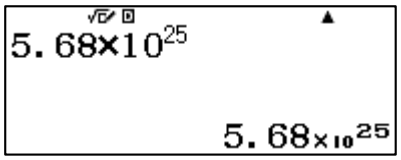
সংখ্যাকে বৈজ্ঞানিকরূপে প্রকাশের জন্য SETUP *menu* ব্যবহার করতে হবে যা প্রথম অনুচ্ছেদে দেখানো হয়েছে। যখন কোনো সংখ্যা অনেক বড় বা ছোট হয় তখন ক্যালকুলেটর স্বয়ংক্রিয়ভাবে সংখ্যাটিকে বৈজ্ঞানিকরূপে উপস্থাপন করে। উদাহরণস্বরূপ, দাবা আবিষ্কারকের একটি মজার ঘটনা উল্লেখ করা যায়। দাবার আবিষ্কারক দাবা আবিষ্কারের পুরস্কার হিসেবে দাবার ঘরের প্রথম ছকে একটি ধানের দানা, দ্বিতীয় ছকে এর দ্বিগুণ এবং তৃতীয় ছকে আগেরটির দ্বিগুণ, এভাবে 64টি ছক পর্যন্ত ধান চেয়েছিলেন। মজার ব্যাপার হলো আপাত দৃষ্টিতে খুব অল্প মনে হলেও 64তম ছকে ধানের যে পরিমাণ দাঁড়ায় তা মোটেও অল্প নয়, বরং অনেক বড় একটি সংখ্যা যা নিচের স্ক্রিনে দেখানো হলো-

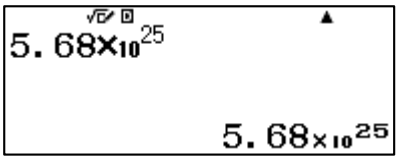


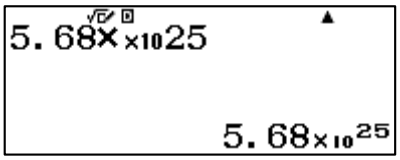


একইভাবে, আলোর গতি সেকেন্ডে 299792458 মিটার। এই গতিতে একটি 210 মিলিমিটার প্রস্থবিশিষ্ট $A4$ আকৃতির কাগজ অতিক্রম করতে যে সময় লাগবে তা অত্যন্ত ছোট। এই দুইটি সংখ্যাই ক্যালকুলেটর স্বয়ংক্রিয়ভাবে বৈজ্ঞানিক রূপে প্রকাশ করবে যা উপরের স্ক্রিনে দেখা যাচ্ছে। যেহেতু ক্যালকুলেটর নির্দিষ্ট সংখ্যক অঙ্ক প্রদর্শন করতে পারে তাই উপরের দুইটি ফলাফলের আসন্ন মান পাওয়া গেছে। দাবার ছকের ক্ষেত্রে প্রকৃত ফলাফল হলো $9.223372037 \times 1000\,000\,000\,000\,000\,000$ অর্থাৎ $9.223372037 \times 10^{18} \approx 9.223372\,037\,000\,000\,000$ প্রকৃতপক্ষে, সঠিক ফলাফল (যা ক্যালকুলেটরের ডিসপ্লের তুলনায় বড়) হলো 9223 372 036 854 775808 যাকে ক্যালকুলেটর আসন্ন মান হিসেবে প্রদর্শন করে।

[×] কী এবং [$x^{\blacksquare}$] কী অথবা 10 ([SHIFT] [$\log_{\blacksquare}\square$]) কী ব্যবহার করে সরাসরি সংখ্যাকে বৈজ্ঞানিকরূপে ক্যালকুলেটরে প্রবেশ করানো যায়। তবে সবচেয়ে সুবিধাজনক হচ্ছে [×10^x] কী ব্যবহার করা।





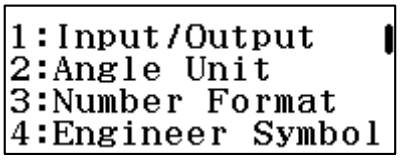


উপরের তিনটি স্ক্রিনে 5.68×10^{25} সংখ্যাটি প্রবেশ করানোর জন্য Key log নিচে দেওয়া হলো-

[5] [•] [6] [8] [×] [1] [0] [$x^{\blacksquare}$] [2] [5] [=]
[5] [•] [6] [8] [×] [SHIFT] [$\log_{\blacksquare}\square$] [2] [5] [=]
[5] [•] [6] [8] [×] [×10^x] [2] [5] [=]

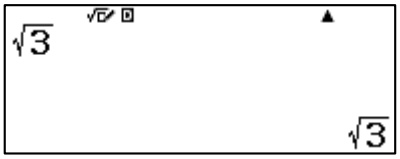
[×10^x] এর ক্ষেত্রে গুণ চিহ্ন এবং ঘাতের জন্য আলাদা কোনো কী চাপতে হয় না বলে এই পদ্ধতিটি অধিক সুবিধাজনক। লক্ষণীয় যে, এক্ষেত্রে ক্যালকুলেটরের ডিসপ্লেতে 10 এর ঘাতকে ঘাত আকারে না দেখালেও ক্যালকুলেটর এটিকে ঘাত হিসেবে বিবেচনা করে ফলাফল প্রদর্শন করেছে।

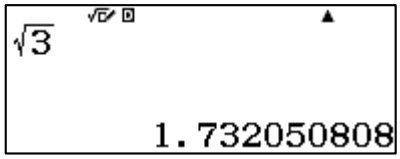
আবার [SHIFT] [MENU] ব্যবহার করে Number Format এ গিয়ে Scientific *mode* নির্বাচন করা যায়।



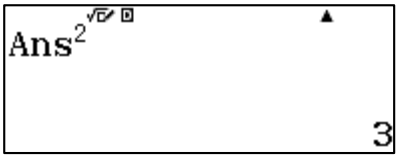
১.৮ সংখ্যার মূল

ক্যালকুলেটরে [√■] ব্যবহার করে সংখ্যার বর্গমূল পাওয়া যায়। নিচের প্রথম স্ক্রিনে 3 এর বর্গমূল আদর্শরূপে প্রদর্শিত হয়েছে। [S⇔D] কী চাপলে দশমিক সংখ্যায় আসন্ন মান পাওয়া যাবে। (বিকল্পভাবে, [SHIFT] [=] ব্যবহার করলে সরাসরি দশমিকে মান পাওয়া যাবে।)



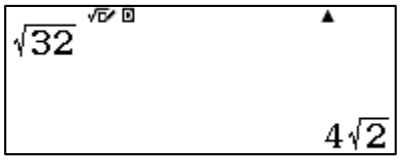


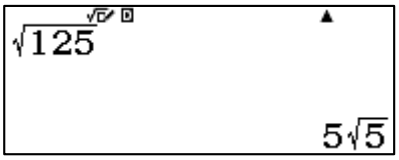
উভয়ক্ষেত্রে ফলাফল পাওয়ার পরপরই [x^2] কী চাপলে প্রাপ্ত ফলাফলের সত্যতা বোঝা যায় পরবর্তী স্ক্রিনে দেখানো হলো-

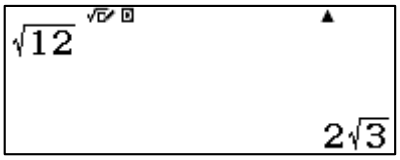


লক্ষণীয় যে, ক্যালকুলেটরে [x^2] কী চাপার ফলে সর্বশেষ ফলটির বর্গ প্রদর্শন করেছে। অতএব কোনো সংখ্যার বর্গমূলকে বর্গ করলে আবার ওই সংখ্যাটিই পাওয়া যায়।

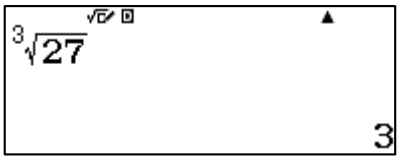
যৌগিক সংখ্যার বর্গমূল বের করার মাধ্যমে বর্গমূলের বৈশিষ্ট্য সম্পর্কে ধারণা পাওয়া যায়।

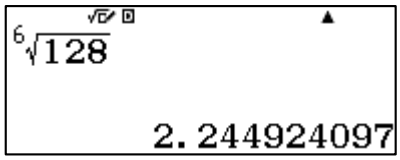




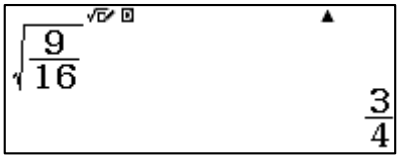


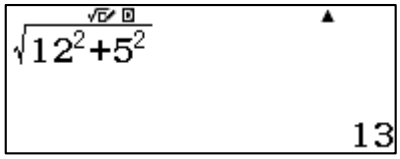
কোনো সংখ্যার অন্যান্য মূলও ক্যালকুলেটরের সাহায্যে সরাসরি বের করা যায়। [SHIFT] [√▪] কী ব্যবহার করে ($^3\sqrt{▪}$) নির্দেশনার মাধ্যমে কোনো সংখ্যার ঘনমূল বের করা যায়। অন্যান্য মূলের জন্য [SHIFT] [$x^▪$] কী এর মাধ্যমে ($^▪\sqrt{□}$) নির্দেশনা ব্যবহার করতে হয়। এই দুইটি নির্দেশনার ব্যবহার নিচের দুইটি স্ক্রিনে দেখানো হলো-





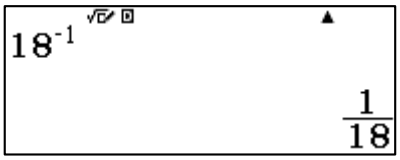
মূল, ঘাত এবং ভগ্নাংশের সকল গণনা ক্যালকুলেটরে খুব সহজেই করা যায়। নিচে আরো দুইটি উদাহরণ দেওয়া হলো-

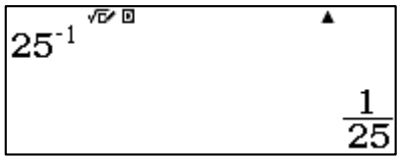




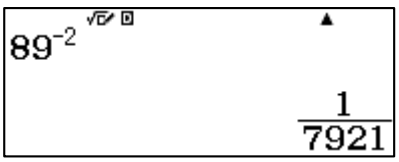
১.৯ সংখ্যার গুণাত্মক বিপরীত (Inverse of Number)

[x^{-1}] ব্যবহার করে কোনো সংখ্যার গুণাত্মক বিপরীত বের করা যায়। নিচের দুইটি উদাহরণে [x^{-1}] কী এর ব্যবহার দেখানো হলোঃ





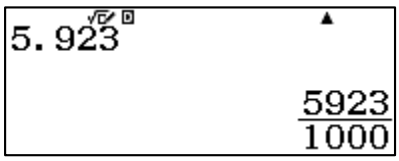
[x^{-1}] কী এর পরিবর্তে [$x^▪$] ও [(−)] কী এর মাধ্যমে ঋণাত্মক সূচক ব্যবহার করেও ব্যস্তানুপাত গঠন করা যায়। কোন সংখ্যার 1 ছাড়া অন্যান্য ঋণাত্মক সূচকের জন্য [$x^▪$] কী ব্যবহার করতে হয়, যা নিচে দেখানো হলো-

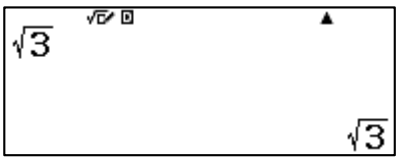


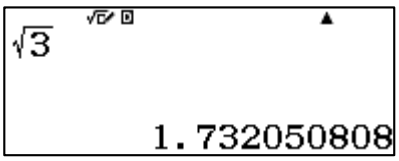
১.১০ মূলদ ও অমূলদ সংখ্যা

যে সকল সংখ্যাকে দুইটি পূর্ণ সংখ্যার অনুপাত আকারে প্রকাশ করা যায় তাদের মূলদ সংখ্যা বলে। এগুলো হতে পারে ভগ্নাংশ, সসীম দশমিক সংখ্যা, পূর্ণ সংখ্যা যেমন, $7, \frac{7}{4}, 13\%$ অথবা 5.923. যে সকল সংখ্যাকে এভাবে প্রকাশ করা যায় না তাদের বলা হয় অমূলদ সংখ্যা। যেমন $\sqrt{2}, \sqrt{7}, \pi$ ইত্যাদি অমূলদ সংখ্যা। অমূলদ সংখ্যা দশমিক সংখ্যায় উপস্থাপন করলে অসীম দশমিক সংখ্যা হয়, যারা আবৃত্ত নয়। বিভিন্ন অমূলদ সংখ্যা যেমন; $\sqrt{2}, 2^{1.2}$ এবং π ক্যালকুলেটরে হুবহু উপস্থাপন করা যায়। আবার দশমিক সংখ্যার মাধ্যমে আসন্ন মানও পাওয়া যায়। ক্যালকুলেটর এই অসীম দশমিক সংখ্যার মান সর্বোচ্চ দশ দশমিক স্থান পর্যন্ত প্রদর্শন করতে পারে।

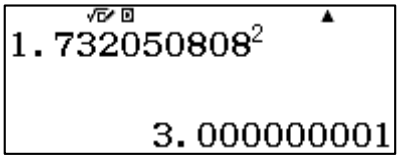
কোনো অমূলদ সংখ্যার আসন্ন মান জানার জন্য ক্যালকুলেটর ব্যবহার করা যায়। তবে এই আসন্ন মানটি পুরোপুরি সঠিক নয়।

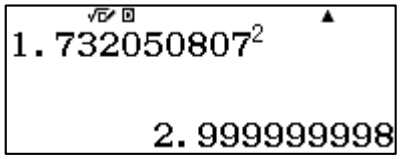






উপরের প্রথম স্ক্রিন হতে দেখা যাচ্ছে যে 5.923 একটি মূলদ সংখ্যা অপরদিকে $\sqrt{3}$ একটি অমূলদ সংখ্যা। এখন যদি $\sqrt{3}$ এর ক্যালকুলটরে প্রাপ্ত আসন্ন মানটিকে নিয়ে বর্গ করা হয়, তাহলে দেখা যাবে এটি কিছুটা বড় ছিল-

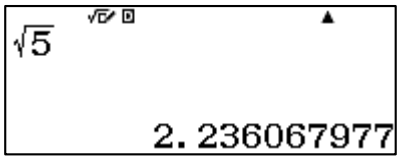


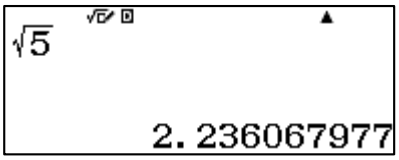


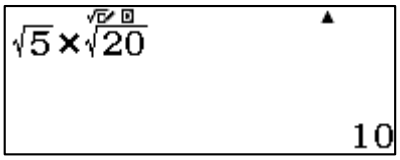
যদি ক্যালকুলেটর দশমিকের পর একই সংখ্যক অঙ্ক নিয়ে পূর্ববর্তী ছোট আসন্ন মানটি প্রদর্শন করত তাহলে এর বর্গ 3 এর চেয়ে কিছুটা ছোট হতো যা উপরের ডান দিকের স্ক্রিনে প্রদর্শিত হয়েছে।

উপরের দুইটি স্ক্রিন হতে এটি পরিষ্কারভাবে বোঝা যায় যে, $1.732050807 < 1.732050808$. ক্যালকুলেটর 1.732050808 সংখ্যাটি প্রদর্শন করে যা থেকে বোঝা যায় যে, অসীম দশমিক সংখ্যাটি 1.732050807 এর চেয়ে 1.732050808 এর অধিক নিকটবর্তী।

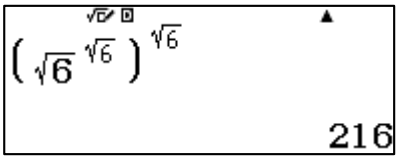
তবে মজার বিষয় হলো এই যে, যদিও অমূলদ সংখ্যাকে উপস্থাপন করার জন্য দশমিকের পরে অসীম সংখ্যক ঘরের প্রয়োজন পরে তবুও কিছু কিছু অমূলদ সংখ্যার গুণফল হলো মূলদ সংখ্যা। নিচে কিছু উদাহরণ দেওয়া হলো-





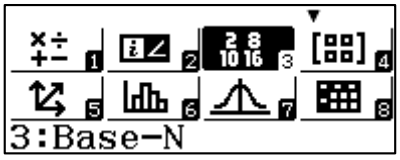


উপরের প্রথম দুইটি স্ক্রিনে অসীম দশমিক সংখ্যার আসন্ন মান প্রদর্শিত হয়েছে। কারণ $\sqrt{5}$ এবং $\sqrt{20}$ দুইটি সংখ্যাই অমূলদ। কিন্তু তাদের গুণফল $\sqrt{100} = 10$ যা একটি পূর্ণ সংখ্যা বিধায় মূলদ সংখ্যা। প্রথম দুইটি স্ক্রিনে আসন্ন মান প্রদর্শিত হয়েছে। যেখানে তৃতীয় স্ক্রিনে প্রকৃত মান দেখানো হয়েছে। একই ভাবে দেখানো যায় যে, কোনো অমূলদ সংখ্যার কিছু কিছু অমূলদ ঘাতের জন্য পূর্ণ সংখ্যা পাওয়া যায়।

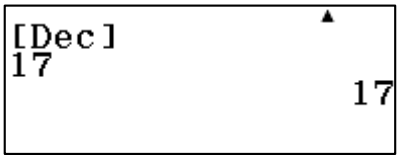


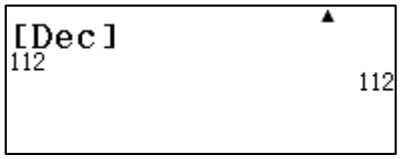
১.১১ ভিন্ন ভিত্তিযুক্ত সংখ্যা

দশমিক সংখ্যা বা Decimal Number পদ্ধতি গোটা বিশ্বজুড়ে ব্যবহৃত হয়। আর তাই ক্যালকুলেটরে সংখ্যা উপস্থাপনের জন্যে এই পদ্ধতিই ব্যবহার করা হয়। তবে কম্পিউটার বিজ্ঞানে দশমিক সংখ্যা ছাড়াও অন্য ভিত্তি যুক্ত সংখ্যা যেমন বাইনারী সংখ্যা, অক্টাল সংখ্যা, হেক্সাডেসিমাল সংখ্যা ইত্যাদি ব্যবহার করা হয়। দশমিক সংখ্যার ভিত্তি 10, সেখানে বাইনারী সংখ্যার ভিত্তি 2, অক্টাল সংখ্যার 8 এবং হেক্সাডেসিমাল এর 16. ক্যালকুলেটরের সাহায্যে যে কোনো পূর্ণ ধনাত্মক সংখ্যাকে এক পদ্ধতি থেকে অন্য পদ্ধতিতে খুব সহজেই রূপান্তর করা যায়। এই সুবিধাটি ব্যবহারের জন্য [MENU] [3] চেপে Base- N *mode* ব্যবহার করতে হবে। ক্যালকুলেটরে প্রাথমিকভাবে Decimal *mode* নির্দিষ্ট থাকে যা নিচের স্ক্রিনে দেখা যাচ্ছে।



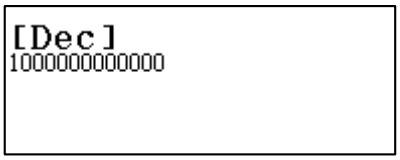
যদি কোনো পূর্ণ সংখ্যাকে (যেমন 17, বা 112) প্রবেশ করিয়ে [=] চাপা হয়, তাহলে এসকল সংখ্যাকে ক্যালকুলেটর দশমিক সংখ্যা হিসেবেই বিবেচনা করবে, যা নিচে দেখানো হলো-

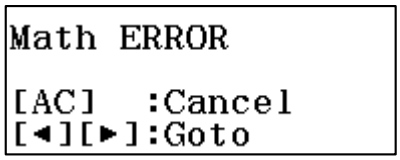




উপরের দুইটি স্ক্রিনের দিকে লক্ষ্য করলে দেখা যাবে যে দুটি স্ক্রিনের ফন্ট (Font) দুই রকম। একটি ছোট, অন্যটি বড়। এই *mode* এ কাজ করার সময় SET UP ([SHIFT] [MENU]) মেনু ব্যবহার করে Multiline font নির্বাচনের মাধ্যমে (Font) হরফের আকৃতি ছোট বা বড় করা যায়।

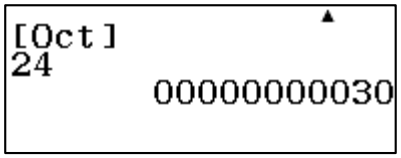
Base- N *mode* এ শুধুমাত্র পূর্ণ সংখ্যা নিয়েই কাজ করা যায়। দশমিক বিন্দু [•] কী এবং বর্গমূল [√■] কী এই *mode* এ স্বাভাবিকভাবে কাজ করে না এবং উপেক্ষিত থেকে যায়। কিন্তু যোগ, বিয়োগ, গুণ ও ভাগের কাজ করা গেলেও তা শুধুমাত্র পূর্ণ সংখ্যার জন্য (তাই দশমিক সংখ্যার ভাগফল এ ক্ষেত্রে কখনই দশমিক সংখ্যা হবে না)। একইভাবে অনেক বড় সংখ্যার জন্য অন্যান্য *mode* এ যেমন বৈজ্ঞানিক আকারে সংখ্যাটি প্রদর্শিত হয় এক্ষেত্রে বৈজ্ঞানিক আকারে প্রদর্শিত না হয়ে বরং Error দেখাবে। নিচে এমন কিছু উদাহরণ দেখানো হলো-

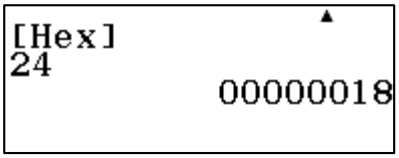


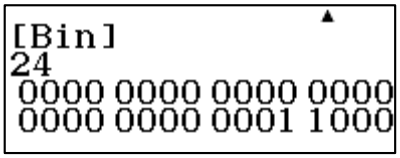


লক্ষণীয় যে, [x^2], [$x^■$], [$\log_■$] এবং [ln] বাটন গুলোর উপর যথাক্রমে DEC, HEX, BIN এবং OCT নির্দেশনা রয়েছে, যেগুলো ব্যবহার করে খুব সহজেই এক ভিত্তি যুক্ত সংখ্যা থেকে অন্য ভিত্তিযুক্ত সংখ্যায় রূপান্তর করা যায়। এই সকল কী এর যেকোনো একটি কী চাপলে ফলাফল ওই ভিত্তিযুক্ত সংখ্যায় প্রদর্শিত হবে। এটি কিভাবে কাজ করে তা দেখার জন্য [AC] চেপে নিচের মতো করে Calculation করতে হবে।

এরপর OCT, HEX এবং BIN কী চাপলে পর্যায়ক্রমে নিচের তিনটি স্ক্রিন পাওয়া যাবে।

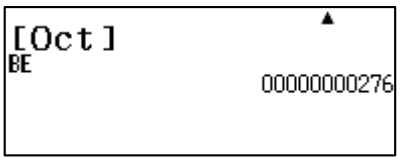




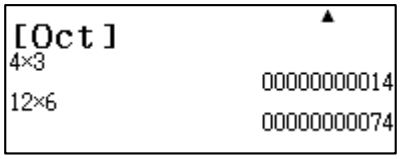


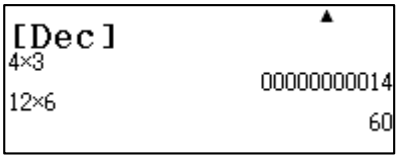
লক্ষণীয় যে, যে ক্যালকুলেশনটিতে 24 প্রবেশ করানো হয়েছে তা অপরিবর্তনীয় রয়ে গেছে এবং প্রতি ক্ষেত্রেই স্ক্রিনে প্রদর্শিত হয়েছে।

যখন কোনো সংখ্যা পদ্ধতি নির্বাচন করা হয় তখন ওই পদ্ধতির সংখ্যাগুলোই শুধুমাত্র প্রবেশ করাতে হবে। যেমন বাইনারি সংখ্যা পদ্ধতির ক্ষেত্রে শুধুমাত্র 1 ও 30 প্রবেশ করালে $Syntax\ Error$ প্রদর্শন করবে। একই ভাবে অক্টাল সংখ্যা পদ্ধতির ক্ষেত্রে 8 ও 9 ব্যবহার করা যাবেনা। অপরদিকে হেক্সাডেসিমাল সংখ্যা পদ্ধতির জন্য আরও অতিরিক্ত প্রতীকের প্রয়োজন পরে। হেক্সাডেসিমাল সংখ্যা পদ্ধতিতে কোনো সংখ্যা প্রবেশ করানোর জন্য অংক নির্দেশক কী ছাড়া A থেকে F পর্যন্ত মেমোরি কী-গুলো ব্যবহার করা হয়। ক্যালকুলেটরের ক্রমানুযায়ী $A = 10, B = 11, C = 12, D = 13, E = 14$ এবং $F = 15$ (10 ভিত্তি ধরে)। লক্ষণীয়যে, ক্যালকুলেটর Hexadecimal *mode* এ থাকলেই শুধু এই কীগুলো সংখ্যা হিসেবে ব্যবহার করা যাবে, অন্যক্ষেত্রে $Syntax\ Error$ প্রদর্শন করবে। এখানে একটি হেক্সাডেসিমাল সংখ্যা BE_{16} এর অক্টালে রূপান্তর দেখানো হলো। এজন্য [$x^{\blacksquare}$] বাটন ব্যবহার করে ক্যালকুলেটরকে হেক্সাডেসিমাল *mode*-এ নিতে হবে, এরপর [°'''] ও [cos] বাটন ব্যবহার করে BE প্রবেশ করাতে হবে এরপর [=] বাটন চাপতে হবে। অতঃপর সংখ্যার রূপান্তরের জন্য [x^2] ও [ln] চাপলে নিচের স্ক্রিনের মতো করে ডেসিমাল ও অক্টালে ফলাফল পাওয়া যাবে।

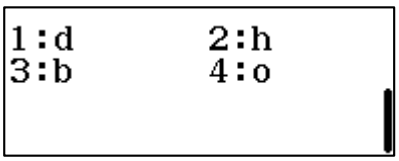


যদি বেশ কিছু সংখ্যার রূপান্তর পরপর করা হয় তাহলে স্ক্রিনের উপরের প্রান্তে ▲ দেখতে পাওয়া যাবে, যা নির্দেশ করছে যে আবার প্রয়োজনে এসব Calculation এ ফিরে যাওয়া যাবে। সংখ্যার ভিত্তি পরিবর্তন করলে সর্বশেষ প্রাপ্ত ফলটি পরিবর্তিত হবে। এখন আবার [▲] চাপলে একে একে সবগুলো ফল পরিবর্তিতত হবে। Octal *mode* এ কিছু সংখ্যা প্রবেশ করানোর পর সে সংখ্যাগুলোর Binary- তে রূপান্তর এভাবে নিচের স্ক্রিনে দেখানো হলো-





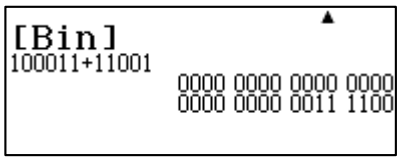
Base-N *mode* এ থাকা অবস্থায় আর একটি পদ্ধতিতে সংখ্যার রূপান্তর করা যায়। [OPTN] [▼] কী চেপে OPTN menu এর দ্বিতীয় স্ক্রিনে গেলে নিচের স্ক্রিনের মতো স্ক্রিন পাওয়া যাবে।

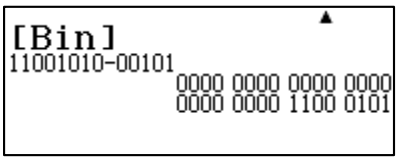


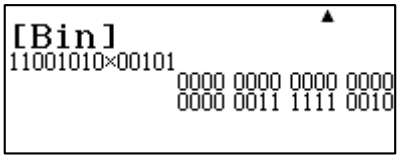
উপরের menu ব্যবহার করে বিভিন্ন সংখ্যা পদ্ধতির হিসাব একসাথে করা যায়। নিচের প্রথম স্ক্রিনে Octal পদ্ধতির 31 ও ডেসিমাল পদ্ধতির 25 এর যোগফল অর্থাৎ $31_8 + 25_{10}$ কিভাবে করা যায় তা দেখানো হলো। [Dec] আগে থেকেই নির্বাচিত থাকায় ফলাফল দশমিক সংখ্যায় পাওয়া যাবে। এমন আরও দুটি উদাহরণ নিচে দেখানো হলো-

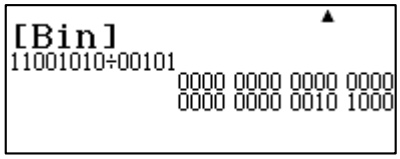
যদি কোনো সংখ্যার পূর্বে কোনো সংখ্যা নির্দেশক প্রতীক না থাকে তাহলে সেই সংখ্যাটি ক্যালকুলেটরে যে সংখ্যা পদ্ধতি নির্বাচিত আছে সেই পদ্ধতির সংখ্যা হিসেবে বিবেচিত হবে। যেমন উপরের তৃতীয় স্ক্রিনে $17_{16} + 31_{16}$ এর যোগফল হেক্সাডেসিমাল পদ্ধতিতেই হবে।

আবার খুব সহজেই যেকোনো বাইনারী সংখ্যার যোগ, বিয়োগ, গুণ ও ভাগ ক্যালকুলেটরের মাধ্যমে বের করা যায়। নিচের স্ক্রিনে বাইনারী সংখ্যার কিছু হিসাব দেখানো হলো-







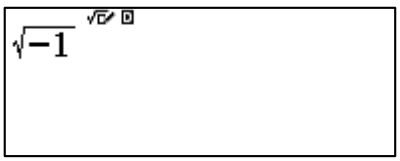


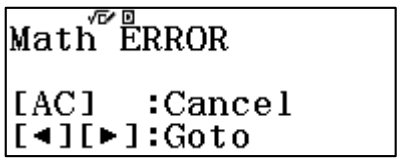
১.১২ জটিল সংখ্যা

কোনো বাস্তব সংখ্যার বর্গ ঋণাত্মক হতে পারে না। যেমন $x^2 + 3 = 0$, এখানে $x^2 = -3$, যা সম্ভব নয়। সমীকরণটির বাস্তব সংখ্যায় কোনো সমাধান নেই। এরকম সমস্যা থেকে জটিল বা কাল্পনিক সংখ্যার উদ্ভব। উচ্চতর গণিতের বিভিন্ন শাখায় জটিল সংখ্যার ব্যবহার বেশ গুরুত্বপূর্ণ।

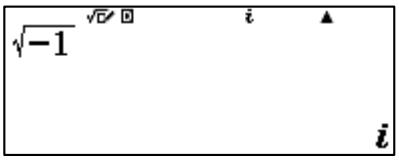
$x^2 - x - 20 = 0$ সমীকরণটির সমাধান করলে x এর মান পাওয়া যায় 5 ও -4 যা বাস্তব সংখ্যা। কিন্তু $x^2 + 1 = 0$ সমীকরণটি সমাধানের চেষ্টা করলে আমরা পাই $x^2 = -1$ বা $x = \pm\sqrt{-1}$, যা কাল্পনিক অর্থাৎ সমীকরণটির বাস্তব মানের কোনো সমাধান নেই। কারণ কোনো বাস্তব সংখ্যার বর্গ ঋণাত্মক হতে পারে না। বিখ্যাত গণিতবিদ অয়লার এই অবাস্তব বা কাল্পনিক সংখ্যাকে i দ্বারা সূচিত করেন। অর্থাৎ $\sqrt{-1} = i$, এখানে i হলো imaginary শব্দের প্রথম অক্ষর। স্পষ্টত $i^2 = -1$.

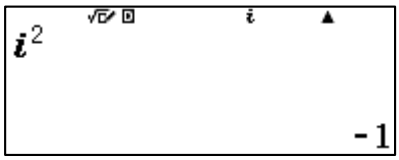
ক্যালকুলেটরে Calulate *mode*-এ এই মান বের করার চেষ্টা করলে Math ERROR প্রদর্শন করবে। যা নিচের স্ক্রিনে দেখানে হলো-





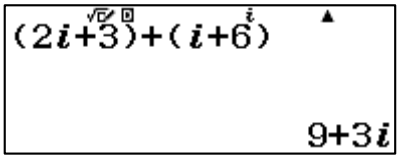
কিন্তু MENU 2 ব্যবহার করে ক্যালকুলেটর complex *mode*-এ নিলে কোনো ERROR পাওয়া যাবেনা।

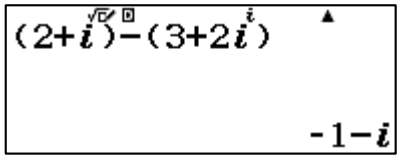




ক্যালকুলেটরটিকে complex *mode*-এ নিলে ডিসপ্লে এর উপরের স্ক্রিনে i প্রদর্শিত হবে, যা নিশ্চিত করে যে এটি complex *mode* এ আছে। complex *mode*-এ ক্যালকুলেটর থাকা অবস্থায় [ENG] কী চাপলে গণনার জন্য i ব্যবহার করা যাবে (এজন্য [SHIFT] চাপার প্রয়োজন নেই)। উপরের স্ক্রিনে i^2 এর মান যে -1 তা দেখা যাচ্ছে।

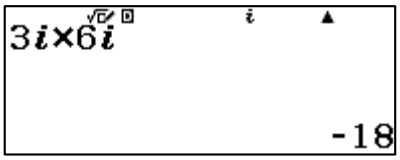
জটিল সংখ্যার গাণিতিক হিসাব (যোগ, বিয়োগ, গুণ, ভাগ ইত্যাদি) খুব সহজেই ClassWiz এর মাধ্যমে করা যায়। নিচের স্ক্রিনে দুটি উদাহরণ দেখানো হলো-

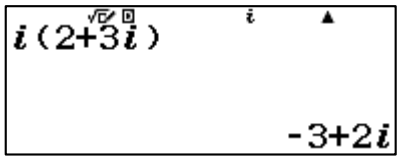




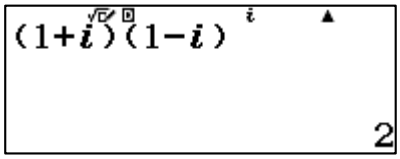
লক্ষণীয় যে, ClassWiz ক্যালকুলেটর জটিল সংখ্যার বাস্তব অংশ সব সময়ই প্রদর্শন করে।

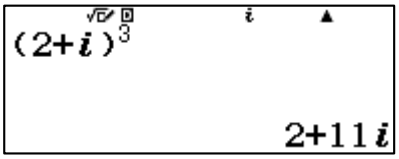
জটিল সংখ্যার গুণ $i^2 = -1$ বৈশিষ্ট্য নির্ভর, যা নিচের স্ক্রিন থেকে স্পষ্টভাবে বোঝা যায়।

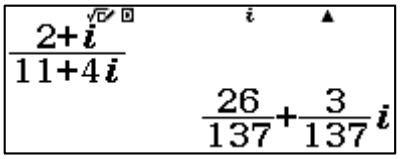




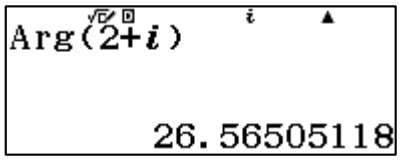
কিভাবে জটিল সংখ্যার গুণ ও ভাগ কাজ করে তার কিছু উদাহরণ নিচে দেখানো হলো-



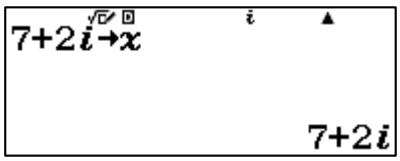


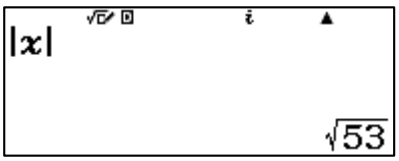


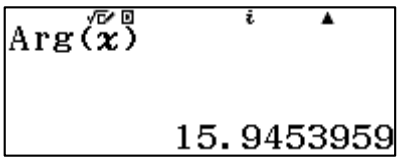
Complex *mode* এ [OPTN] menu ব্যবহার করে জটিল সংখ্যার আরও কিছু Calculation করা সম্ভব। কীভাবে একটি জটিল সংখ্যার আর্গুমেন্ট বের করা যায় (OPTN menu ব্যবহার করে) তা নিচে দেখানো হলো-



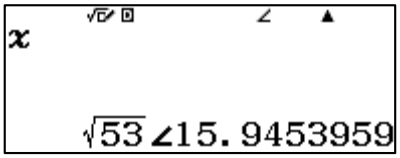
একটি জটিল সংখ্যা $7 + 2i$ এর মডুলাস ও আর্গুমেন্ট সহজে বের করার জন্য প্রথমে সংখ্যাটিকে টাইপ করে [STO] ব্যবহার করে একে মেমোরিতে সংরক্ষণ করতে হবে। এরপর নিচের মতো করে OPTN menu ব্যবহার করে আর্গুমেন্ট ও মডুলাস বের করা যায়।

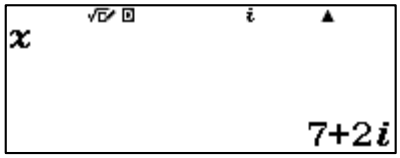




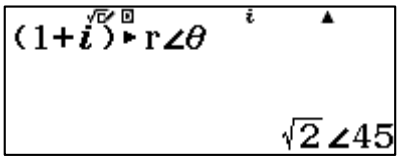


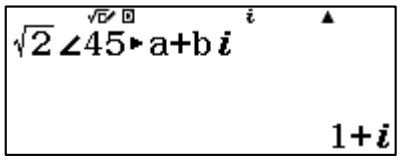
মডুলাস বের করার জন্য [SHIFT] [(] (Abs) ব্যবহার করতে হবে। আর আর্গুমেন্ট এর জন্য OPTN menu তে Arg অপশন ব্যবহার করতে হয়। SET UP ([SHIFT] [MENU]) ব্যবহার করে দ্বিতীয় স্ক্রিনে গিয়ে [2] চাপলে নিচের মতো দুইটি অপশন প্রদর্শিত হবে। এই দুইটি অপশন ব্যবহার করে জটিল সংখ্যার পোলার ও কার্তেসীয় আকার পাওয়া যাবে।





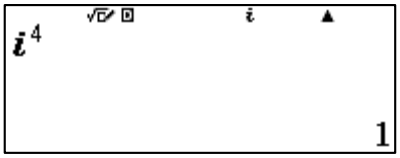
OPTN MENU-এর দ্বিতীয় স্ক্রিন ব্যবহার করে জটিল সংখ্যাকে পোলার থেকে কার্তেসীয় এবং কার্তেসীয় থেকে পোলার স্থানাঙ্কে রূপান্তরিত করা যায়। এজন্য অবশ্যই ক্যালকুলেটরটিকে আউটপুটের জন্য Math *mode*-এ রাখতে হবে।

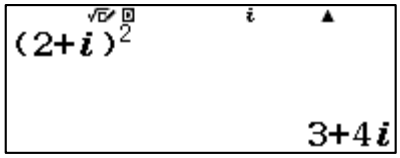


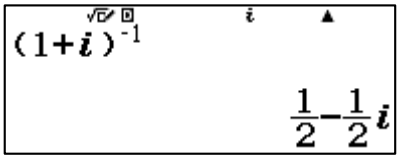


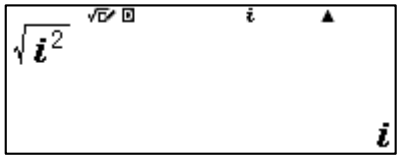
পোলার আকারে সংখ্যাকে ক্যালকুলেটরে প্রবেশ করানোর জন্য [SHIFT] [ENG] (∠) ব্যবহার করতে হবে।

[x^2], [x^3], [x^{-1}], [√■] এবং [$x^■$] কীগুলো ব্যবহার করে জটিল সংখ্যার যথাক্রমে বর্গ, ঘন, ব্যস্তানুপাত, বর্গমূল ও ঘাত বের করা যায়। নিচে কিছু উদাহরণ দেওয়া হলো-







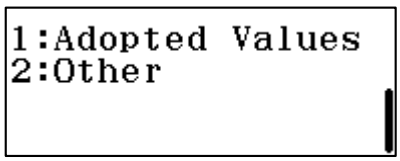


লক্ষণীয়যে, কিছু কিছু সরলসহ সমীকরণের সমাধানে ক্যালকুলেটর জটিল সংখ্যায় ফলাফল প্রদর্শন করে (ক্যালকুলেটরটিতে complex *mode* নির্বাচন করা না থাকলেও)

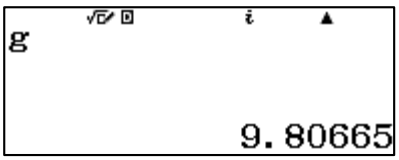
১.১৩ বৈজ্ঞানিক ধ্রুবক

গণিত ও বিজ্ঞানের বিভিন্ন শাখায় বিভিন্ন রকম বৈজ্ঞানিক ধ্রুবক ব্যবহার করা হয়। দ্রুত ব্যবহারের জন্য 47 টি ধ্রুবকের মান ClassWiz ক্যালকুলেটরের মাধ্যমে যেকোনো সময় বের করা যায়। User Guide-এ এসবের একটি তালিকা দেয়া রয়েছে।

Constant ([SHIFT] [7]) নির্দেশনা ব্যবহার করে এসকল ধ্রুবকের মান যে কোনো সময় ব্যবহার করা যায়। এসকল ধ্রুবকের মান ব্যবহারের উপর ভিত্তি করে নিচের মতো ভাগ করা হয়েছে।

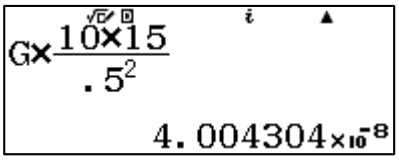


g এর মান Adopted values নির্বাচন করার পরে [1] এবং তারপর [=] বাটন চাপলেই পাওয়া যাবে।



সূত্র ব্যবহার করার সময় ধ্রুবক সমূহের মান আলাদাভাবে বের না করেও সরাসরি ব্যবহার করা যায়।

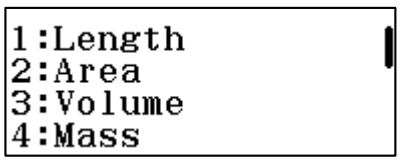
উদাহরণস্বরূপ, $F = G\frac{m_1 m_2}{d^2}$ সমীকরণটিতে মহাকর্ষীয় ধ্রুবক G এর মান সরাসরি ব্যবহার করা যায়। $10kg$ ও $15\,kg$ ভর বিশিষ্ট দুইটি বস্তু পরস্পর হতে $.5m$ দূরত্বে অবস্থান করলে তাদের মধ্যকার মহাকর্ষীয় বলের মান নিচের মতো করে সরাসরি বের করা যায়।

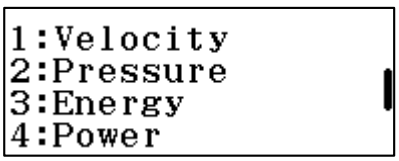


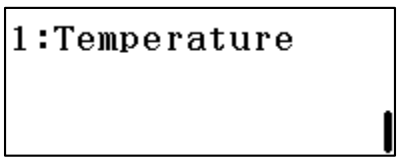
উপরের স্ক্রিন হতে দেখা যায় যে, বস্তু দুইটির মধ্যে বিদ্যমান মহাকর্ষ বলের মান $4.004 \times 10^{-8}N$ এই ক্যালকুলেটরে ব্যবহৃত ধ্রুবকগুলো 'Committee On Data for Science and Technology (CODATA)' এর 2010 সালে আন্তর্জাতিক ব্যবহারের $Standard$ এর উপর ভিত্তি করে নেওয়া হয়েছে।

১.১৪ পরিমাপের এককের রূপান্তর

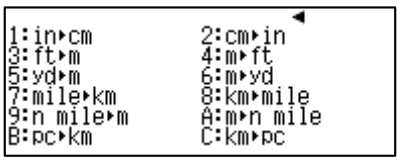
বিজ্ঞান ও প্রযুক্তির জগতে প্রায় সব রকম পরিমাপের জন্য মেট্রিক পদ্ধতি ব্যবহার করা হলেও কিছু কিছু ক্ষেত্রে অন্যান্য পদ্ধতি ব্যবহার করা হয়। পরিমাপের বিভিন্ন রকম এককের রূপান্তর করার জন্য ClassWiz ক্যালকুলেটরে 20 জোড়া Unit Conversion সুবিধা রয়েছে। এগুলোকে 9 টি ভাগে ভাগ করা হয়েছে। [SHIFT] [8] (CONV) ব্যবহার করে এসব এককে রূপান্তর করতে হয় যা নিচে দেখানো হলো-

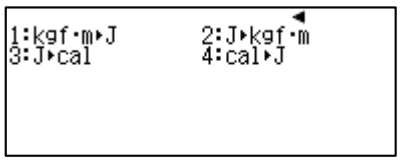




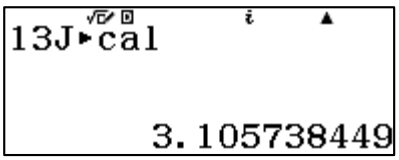


এসবের মধ্যে Length, এর ব্যবহার সবচেয়ে বেশি যা 1 চেপে পাওয়া যায়। অনুরূপভাবে, শক্তির এককে রূপান্তর অর্থাৎ জুল থেকে ক্যালরি অথবা ক্যালরি থেকে জুলে রূপান্তর সম্ভব। এটি Energy গ্রুপে পাওয়া যাবে।





যে সংখ্যাটিকে জুল থেকে ক্যালরিতে রূপান্তর করতে হবে সেই সংখ্যাটি প্রবেশ করানোর পর যথোপযুক্ত conversion নির্বাচন করতে হবে। এরপর [=] বাটন চাপলে ফলাফল পাওয়া যাবে। উদাহরণস্বরূপ, 13 জুলকে ক্যালরিতে রূপান্তর করতে হলে প্রথমে 13 চাপতে হবে। এরপর [SHIFT] [8] চেপে দ্বিতীয় স্ক্রিনে গিয়ে Energy নির্বাচনের জন্য 3 চাপতে হবে। অতঃপর আবার 3 চেপে $J \rightarrow cal$ নির্বাচন করে [=] চাপলে ফলাফল পাওয়া যাবে।



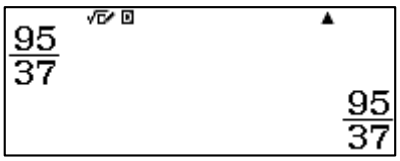
উপরের স্ক্রিন হতে দেখা যাচ্ছে যে, $13J = 3.105738449\ cal.$

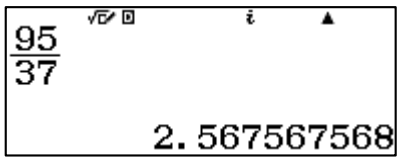
'National Institue of Standards and Technology (NIST)' এর $Standard$ এর উপর ভিত্তি করে ক্যালকুলেটরে পরিমাপের এককের রূপান্তরের মানগুলো নেওয়া হয়েছে।

উদাহরণমালা

১. $\frac{95}{37}$ কে দশমিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করতে হবে।

সমাধান- [▭/▭] বাটন ব্যবহার করে প্রদত্ত ভগ্নাংশকে ক্যালকুলেটরে প্রবেশ করিয়ে [=] বাটন চাপলে ক্যালকুলেটর ভগ্নাংশ আকারে ফলাফল দেখাবে। এরপর [S⇔D] বাটন চাপলে দশমিক আকারে ফলাফল প্রদর্শিত হবে।

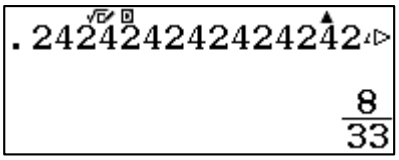




(Key log- [▭/▭] [9] [5] [▶] [3] [7] [=] [S⇔D])

২. $0.\dot{2}\dot{4}$ কে সাধারণ ভগ্নাংশে প্রকাশ করতে হবে।

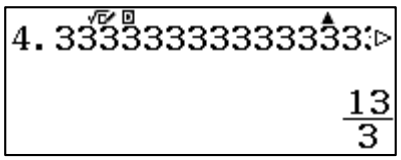
সমাধান- যেহেতু ক্যালকুলেটরে সরাসরি আবৃত্ত দশমিক সংখ্যা লেখার কোনো পদ্ধতি নেই, তাই $0.\dot{2}\dot{4}$ কে $0.24242424 \ldots \ldots \ldots \ldots$ আকারে ক্যালকুলেটরে প্রবেশ করাতে হবে। লক্ষ্য রাখতে হবে যে, দশমিকের পরে অন্তত দশ ঘর পর্যন্ত সংখ্যাপূরণ করতে হবে। এরপর [=] বাটন চাপলে সাধারণ ভগ্নাংশ আকারে নিচের স্ক্রিনের মতো ফলাফল প্রদর্শিত হবে।

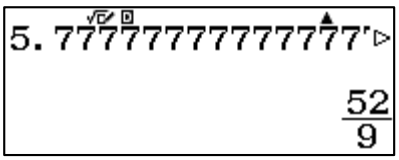


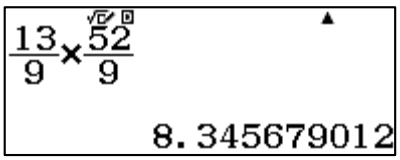
(Key log- [•] [2] [4] [2] [4] [2] [4] [2] [4] [2] [4] [2] [4] [2] [4] [2] [4] [2] [4] [2] [4] [2] [4] [=])

৩. $4.\dot{3}$ কে $5.\dot{7}$ দিয়ে গুণ করতে হবে।

সমাধান- $4.\dot{3}$ এবং $5.\dot{7}$ কে প্রথমে ২ নং উদাহরণের মতো সাধারণ ভগ্নাংশে রূপান্তর করতে হবে। এরপর ভগ্নাংশদ্বয়কে গুণ করলে ফলাফল ভগ্নাংশেই প্রদর্শিত হবে। এরপর [=] বাটন চাপলে ফলাফল দশমিকে প্রদর্শিত হবে।



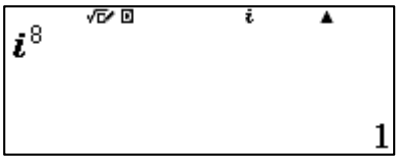




(Key log- [4] [•] [3] [3] [3] [3] [3] [3] [3] [3] [3] [3] [3] [3] [3] [3] [3] [=] [AC] [5] [•] [7] [7] [7] [7] [7] [7] [7] [7] [7] [7] [7] [7] [7] [7] [7] [7] [7] [7] [=] [AC] [1] [3] [▭/▭] [9] [▶] [×] [5] [2] [▭/▭] [9] [=] [S⇔D])

৪. i^8 নির্ণয় করতে হবে।

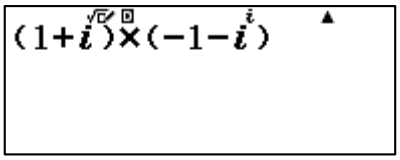
সমাধান- প্রথমে [MENU] [2] চেপে complex *mode* নির্বাচন করতে হবে। এরপর [ENG] বাটন চাপলে ক্যালকুলেটরে i প্রদর্শিত হবে। i এর ঘাত প্রবেশ করানোর জন্য [$x^{\blacksquare}$] বাটন ব্যবহার করতে হবে। এরপর [=] বাটন চাপলে নিচের স্ক্রিনের মতো ফলাফল প্রদর্শিত হবে।

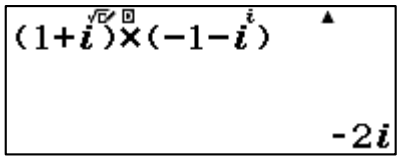


(Key log- [MENU] [2] [ENG] [$x^{\blacksquare}$] [8] [=])

৫. $(1+i)$ ও $(-1-i)$ দুইটি জটিল সংখ্যার গুণফল বের করতে হবে।

সমাধান- [MENU] [2] চেপে complex *mode* নির্বাচন করে জটিল সংখ্যাদ্বয়কে নিচের প্রথম স্ক্রিনের মতো প্রবেশ করাতে হবে। এরপর [=] বাটন চাপলে দ্বিতীয় স্ক্রিনের মতো ফলাফল প্রদর্শিত হবে ।





(Key log- [MENU] [2] [(] [1] [+] [ENG] [)] [×] [(] [−] [1] [−] [ENG] [)] [=])

৬. $(125)_{10}$ কে হেক্সাডেসিমালে রূপান্তর করতে হবে।

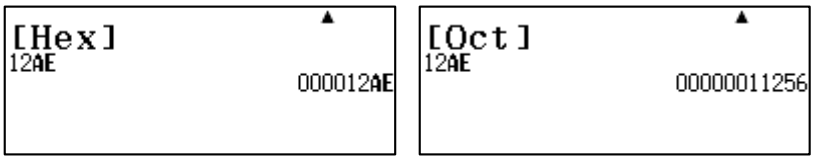
সমাধান- প্রথমে [MENU] [3] চেপে Base- N *mode*-এ প্রবেশ করতে হবে। ক্যালকুলেটর গতানুগতিকভাবে [Dec] (ডেসিমাল) প্রদর্শন করবে । প্রদত্ত সংখ্যাটিকে প্রবেশ করিয়ে [=] চাপতে হবে। এরপর [$x^{\blacksquare}$] (HEX) বাটন চাপলে প্রদত্ত দশমিক সংখ্যাটি নিচের দ্বিতীয় স্ক্রিনের মতো হেক্সাডেসিমালে পরিণত হবে।

(Key log- [MENU] [3] [1] [2] [5] [=] [$x^{\blacksquare}$])

৭. $(12AE)_{16}$ কে অক্টালে রূপান্তর করতে হবে।

সমাধান- উপরের উদাহরণের মতো Base- N *mode* এ প্রবেশ করতে হবে। ক্যালকুলেটর [Dec] (ডেসিমাল) প্রদর্শন করবে । [$x^{\blacksquare}$] বাটন চাপলে ক্যালকুলেটর Hexadecimal *mode* এ যাবে এবং [Hex] (হেক্সাডেসিমাল) প্রদর্শন করবে।

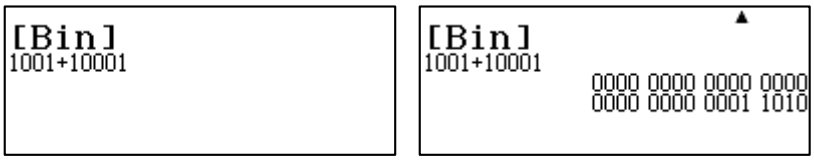
এরপর $12AE$ সংখ্যাটিকে ক্যালকুলেটরে প্রবেশ করিয়ে [ln] (oct) বাটন চাপলে সংখ্যাটি নিচের দ্বিতীয় স্ক্রিনের মতো অক্টালে প্রদর্শিত হবে।



[MENU] [3] [$x^{\blacksquare}$] [1] [2] [(−)] [cos] [=] [ln]

৮. $(1001)_2$ ও $(10001)_2$ যোগ করতে হবে।

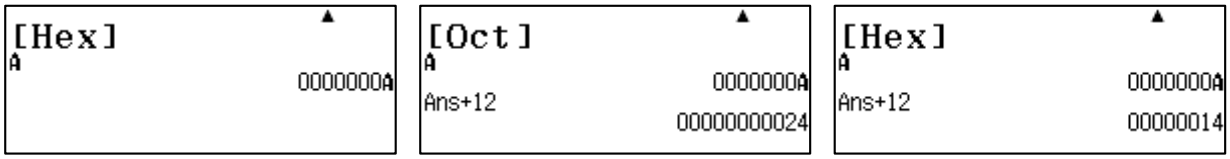
সমাধান- [MENU] [3] চেপে ক্যালকুলেটরে Base- N *mode* এ প্রবেশ করা হলো। এরপর [log▪□] (BIN) চেপে Binary *mode* এ প্রবেশ করতে হবে। অতঃপর নিচের স্ক্রিনের মতো সংখ্যা দুইটিকে প্রবেশ করিয়ে বাটন [=] চাপলে ফলাফল প্রদর্শিত হবে।



(Key log- [MENU] [3] [log▪□] [1] [0] [0] [1] [+] [1] [0] [0] [0] [1] [=])

৯. $(A)_{16} + (12)_8 = ?$

সমাধান- [MENU] [3] চেপে ক্যালকুলেটরে Base- N *mode* এ প্রবেশ করে [$x^{\blacksquare}$] (Hex) চেপে প্রথমে Hexadecimal *mode* এ আসতে হবে। এরপর [(−)] (A) চেপে [=] বাটন চাপলে নিচের প্রথম স্ক্রিনের মতো একটি স্ক্রিন পাওয়া যাবে। এরপর [+] বাটন চেপে [ln] (oct) চাপলে ক্যালকুলেটর দ্বিতীয় মানটি অক্টাল গ্রহণ করবে। দ্বিতীয় মানটি দেওয়ার পর [=] বাটন চাপলে ফলাফল অক্টালে প্রদর্শিত হবে। হেক্সাডেসিমালে ফলাফল পাওয়ার জন্য [$x^{\blacksquare}$] (HEX) বাটন চাপতে হবে।



(Key log- [MENU] [3] [$x^{\blacksquare}$] [(−)] [=] [+] [ln] [1] [2] [=] [$x^{\blacksquare}$])

অনুশীলনী-১

১। আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর- (ক) $\frac{1}{6}$(খ) $\frac{7}{11}$ (গ) $3\frac{2}{9}$

২। সাধারণ ভগ্নাংশে প্রকাশ কর- (ক) $0.\dot{2}$ (খ) $0.\dot{3}\dot{5}$ (গ) $0.1\dot{3}$

৩। সদৃশ আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর- (ক) $2.\dot{3}, 5.2\dot{3}\dot{5}$ (খ) $7.2\dot{6}, 4.23\dot{7}$

(গ) $5.\dot{7}, 8.\dot{3}\dot{4},\ 6.\dot{2}4\dot{5}$

৪। $43, 80$ এর শতকরা কত অংশ?

৫। 12345678 এর সকল মৌলিক উৎপাদক বের কর।

৬। 7^6 এর মান বের কর।

৭। $4^5 + 12$ এর মান বের কর।

৮। $2^{29} - 1$ মৌলিক সংখ্যা কি না তা নির্ণয় কর।

৯। $7^3 \times 7^3 \times 7^3$ এর মান নির্ণয় কর এবং এটি 343^3 এর সমান কিনা তা দেখ।

১০। $10^{\frac{1}{2}}$ এর মান নির্ণয় কর এবং প্রাপ্ত ফলকে বর্গ করলে কী ঘটবে তা ব্যাখ্যা কর।

১১। ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে 7^{-2} এর মান বের কর।

১২। একটি সংখ্যার বর্গমূলের মান পাওয়া গেল $6\sqrt{2}$ সংখ্যাটি কত?

১৩। একটি বাচ্চার জন্মের সময় ওজন 3.3kg। পাউন্ড ও আউন্সে ওজন কত হবে?

১৪। টেকনাফ থেকে তেঁতুলিয়া এর দূরত্ব 567 মাইল। ক্যালকুটেরের সাহায্যে দূরত্বকে কিলোমিটারে প্রকাশ কর।

১৫। $(62)_{10}$ কে হেক্সাডেসিমাল, অক্টাল ও বাইনারিতে রূপান্তর কর।

১৬। $12_8 + 57_8 + 14_8 = ?$

১৭। -9 এর বর্গমূল কত হবে?

১৮। $4 - 7i$ এর অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা, মডুলাস ও আর্গুমেন্ট বের কর।

১৯। $12 + 5i$ কে পোলার আকারে প্রকাশ কর।

২০। $\left(6, \frac{2\pi}{3}\right)$ কে কার্তেসীয় আকারে প্রকাশ কর।

২১। $(4 - i)^{-3}$ এর মান কত?

২২। $(6 - i)(4i + 5)$ এর মান কত?

২৩। $(3 + i) \div (2 + i)$ এর মান কত?

দ্বিতীয় অধ্যায়

ফাংশন

(Function)

যদি দুইটি চলক x ও y এর মধ্যে এমন একটি বিশেষ ধরনের অন্বয় বা সম্পর্ক থাকে যেন x এর প্রতিটি মানের জন্য y এর একটি ও কেবলমাত্র একটি মান পাওয়া যায় তাহলে ঐ অন্বয় বা সম্পর্ককে ফাংশন বলা হয়। যদি x এর কোনো মানের জন্য y এর একাধিক মান পাওয়া যায় তাহলে ঐ অন্বয়টিকে ফাংশন বলা যাবেনা।

ফাংশনের ধারণা গণিতের মৌলিক ধারণাগুলোর একটি। ClassWiz Claculator ব্যবহার করে ফাংশনের বৈশিষ্ট্যগুলো সাংখ্যিকভাবে পর্যবেক্ষণ করা যায়। এই বৈশিষ্ট্যগুলোর ভিতরে আছে নানাবিধ ফাংশনের প্রকৃতি, সাম্যতা, অসীমতোট রেখা এবং সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্নমান।

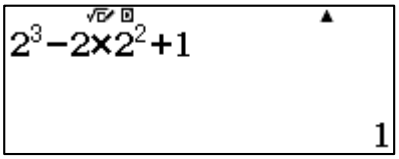
- ফাংশন এবং রাশির পর্যবেক্ষণ
- একাধিক রাশির মধ্যে তুলনা
- রৈখিক ও দ্বিঘাত ফাংশনের বৈশিষ্ট্য সম্পর্কে আলোচনা।
- ত্রিঘাত ফাংশনের বৈশিষ্ট্য সম্পর্কে আলোচনা
- মূলদ ফাংশনের আলোচনা
- ফাংশনের লেখচিত্র সম্পর্কে ধারণা এবং
- ফাংশনের সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মান নির্ণয়

এজন্য Calculator এ CALC প্রসেস এবং Table *mode* (MENU 9) ব্যবহার করা হবে।

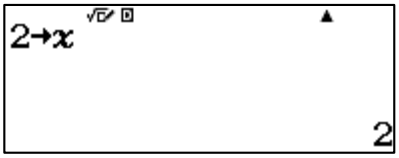
২.১ ফাংশন এবং রাশির পর্যবেক্ষণ

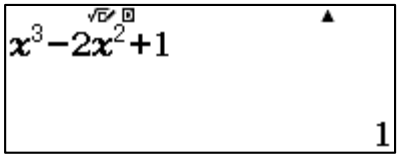
Calulate *mode* এর মাধ্যমে ফাংশন পর্যবেক্ষণ করার বিভিন্ন উপায় আছে। একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে রাশি অথবা ফাংশনের মান ক্যালকুলেটরের সাহায্যে সরাসরি বের করা যায়। ধরা যাক, একটি ফাংশন $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$.

2 দ্বারা x কে প্রতিস্থাপন করে $x = 2$ এর জন্য ফাংশনের মান বের করা যায়-

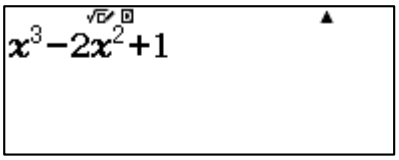


বিকল্প পদ্ধতিতে, x এর মান বার বার বসানোর ঝামেলা এড়ানোর জন্য, একে মেমোরিতে সংরক্ষণ করা হয়। এজন্য প্রথমে STO এবং তারপর x চেপে নিম্নোক্ত ভাবে রাশিটির মান বের করা সম্ভব-

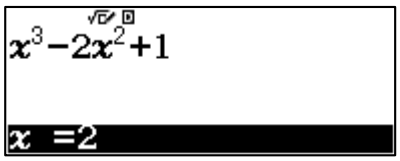


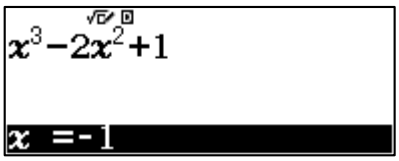


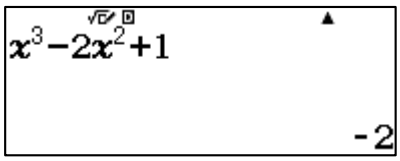
যখন অনেকগুলো মান দেয়া থাকবে তখন [CALC] ব্যবহার করা অধিক সুবিধাজনক। উদাহরণস্বরূপ ধরা যাক, $x = -1,2$ এবং 3 এর জন্য কোনো মানটি ফাংশনের মূলের কাছাকাছি, যেখানে $f(x) = 0$, তা বের করতে হবে। যে রাশিটির মান বের করতে হবে তা [x] (কিন্তু [=] না চেপে) চেপে ক্যালকুলেটরে প্রবেশ করানো যায়-



ফাংশনটির মান বের করার জন্য [CALC] কী চাপলে ক্যালকুলেটর x এর বর্তমান মান প্রদর্শন করবে (এক্ষেত্রে $x = 2$), যা স্ক্রিনের নিচের অংশে প্রদর্শিত হবে। [=] চাপার পরে x এর কাঙ্খিত মান প্রবেশ করলে এটি নতুন মান প্রদর্শন করবে যা নিচে মাঝের স্ক্রিনে দেখানো হয়েছে। রাশিটির মান বের করার জন্য পরিশেষে [=] কী চাপতে হবে। ফলাফলটি নিচে তিন নাম্বার স্ক্রিনে দেখানো হয়েছে।

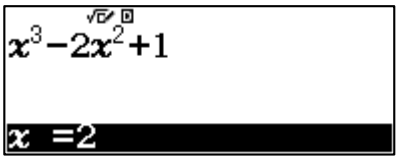


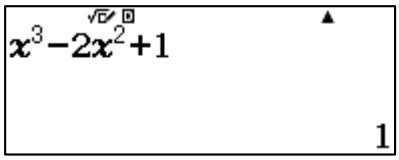


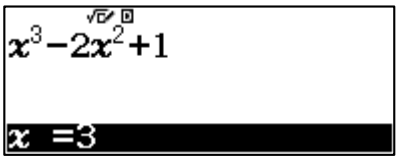


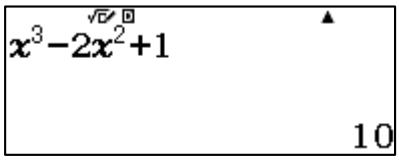
পুনরায় [=] বাটন চেপে এই পদ্ধতিটি অন্যান্য মানের জন্য চালু রাখা যায়। [AC] বাটন না চাপা পর্যন্ত অথবা ক্যালকুলেটরের *Mode* পরিবর্তন না করা পর্যন্ত CALC প্রোসেস চালু থাকবে। এই পদ্ধতিতে দক্ষতার সাথে অনেকগুলো মান বের করা সম্ভব।

নিচের স্ক্রিনে দেখা যাচ্ছে যে, $f(2) = 1$ ও $f(3) = 10$ এই তিনটি মান থেকে অনুধাবন করা যায়, $x = 2$ এর জন্য x এর মান ফাংশনের একটি মূলের কাছাকাছি।





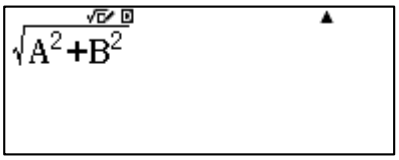




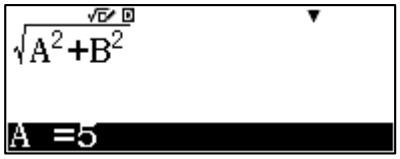
ClassWiz এ মান সংরক্ষণের জন্য A থেকে F, x, y ও M সর্বমোট ৯ টি মেমোরি কী রয়েছে। এই মেমোরি কী গুলো ব্যবহার করে একাধিক চলকবিশিষ্ট রাশির মানও CALC সুবিধার মাধ্যমে বের করা যায়। উদাহরণস্বরূপ বলা যায়, যদি Aও Bএকটি সমকোণী ত্রিভুজের দুইটি সমকোণ সন্নিহিত বাহু নির্দেশ করে তাহলে অতিভুজের মান হবে-

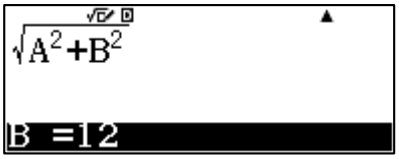
$$\sqrt{(A^2 + B^2)}$$

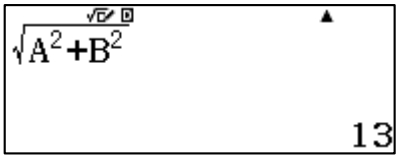
এই রাশিটি ক্যালকুলেটরে প্রবেশ করিয়ে [CALC] কী চাপতে হবে।



নিচে প্রদর্শিত চিত্রের মতো ক্যালকুলেটর A এবং B এর মান চাইবে এবং রাশিটির মান বের করবে। প্রত্যেকটি মান প্রবেশ করানোর পর [=] কী চাপতে হবে।



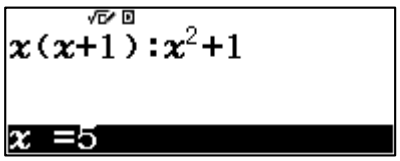


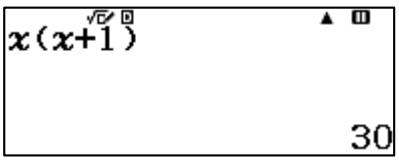


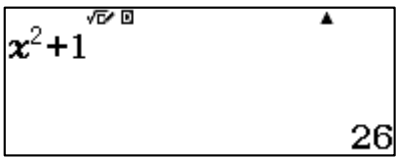
সুতরাং, একটি সমকোণী ত্রিভুজের দুইটি সন্নিহিত বাহু 5 এবং 12 হলে এর অতিভুজ হবে 13। A ও B এর আরো মান বসানোর জন্য পুনরায় [=] অথবা [CALC] বাটন চাপতে হবে।

২.২ রাশির তুলনা

CALC সুবিধা কয়েকটি রাশির তুলনা করার জন্য ব্যবহার করা যেতে পারে। এটি করার জন্য রাশিগুলোর মাঝে কোলন (:) ([ALPHA] [∫]) বসাতে হয়। এরপর [CALC] বাটন চেপে চলকগুলোর মান প্রবেশ করাতে হয়। ক্রমান্বয়ে [=] বাটন চাপলে রাশিগুলোর মান এক এক করে বের হবে। নিচের উদাহরণে দুইটি রাশি $x(x+1)$ এবং x^2+1এর মান তুলনা করা হয়েছে।







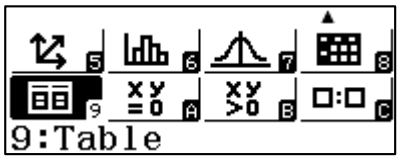
x এর একটি মান প্রবেশ করানোর পর [=] বাটন চাপলে x এর ঐ মানের জন্য প্রতিটি রাশির মান পর্যায়ক্রমে বের হবে। দ্বিতীয়টির পর [=] বাটন পুনরায় চেপে xএর নতুন মান প্রবেশ করানো যাবে।

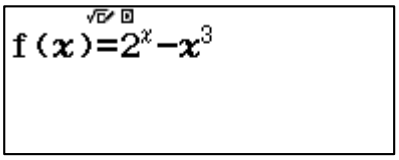
এই ভাবে দেখা যায় যে, x এর বিভিন্ন মানের জন্য $x(x+1)$এবং x^2+1এর মান ভিন্ন রকম হবে। শুধুমাত্র $x=1$এর জন্য দুইটি ফাংশনের মান একই হয়।

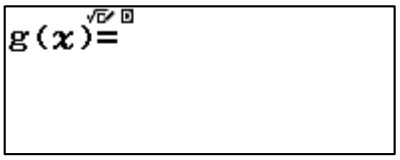
২.৩ Table *mode* এর ব্যবহার

যখন একটি ফাংশনের মান বিভিন্ন বিন্দুতে বের করতে হয়, তখন মানের তালিকা তৈরি করা সব থেকে ভালো পদ্ধতি হতে পারে। এটি করার জন্য Table *mode* ব্যবহার করতে হবে। [MENU] [9] চেপে x এর একটি ফাংশন f প্রবেশ করানো যায়।

উদাহরণ হিসেবে বলা যায়, $x=0$ এবং $x=2$ এর মধ্যে $f(x)=2^x-x^3$এর মান কোথায় শূন্য তা নির্ণয় করার জন্য অনেকগুলো বিন্দুতে মান বের করে ফাংশনটির কোনো মান শূন্যের কাছাকাছি তা দেখা সুবিধাজনক। এটি করার জন্য সমতুল্য ফাংশন $f(x)=2^x-x^3$ নিচের মতো করে তালিকা ভুক্ত করা যায় (এখানে শুধুমাত্র f ফাংশনটি ব্যবহার করা হয়েছে)।



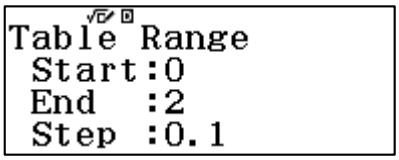


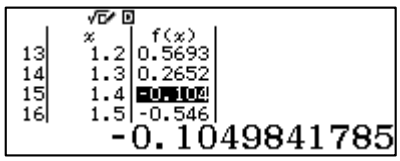


2^x প্রবেশ করানোর পর সূচক থেকে বের হওয়ার জন্য [▶] বাটন চাপার কথা মনে রাখাতে হবে।

ক্যালকুলেটরে [=] বাটনের মাধ্যমে $f(x)$ ফাংশন প্রবেশ করানোর পর স্ক্রিনে $g(x)$ ফাংশনটি আসবে। যেহেতু আমাদের এখানে একটি ফাংশন রয়েছে, [=] চেপে একে উপেক্ষা করা যায়। (SETUP এ গিয়ে টেবিল (Table) নির্দেশনা ব্যবহার করে ClassWiz কে একটি ফাংশনে সীমাবদ্ধ রাখা যায়।)

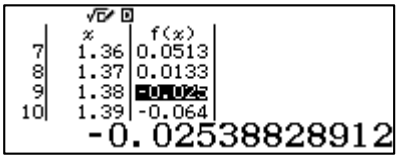
এরপর Table এর জন্য x এর যে মানগুলোর তালিকা তৈরিকরতে হবে তার প্রথম মান হিসেবে Start, শেষ মান হিসেবে End এবং তাদের মাঝের বৃদ্ধির পরিমাণ হিসেবে Step এর মান প্রবেশ করাতে হবে। খেয়াল রাখতে হবে যে, টেবিলটি ৩০টি মান ধারণ করতে সক্ষম। এক্ষেত্রে, একটি উদাহরণ নিচে দেখানো হলো। প্রত্যেকটি মান প্রবেশ করানোর পর [=] বাটন চাপতে হবে।





Step এর মান প্রবেশ করানোর পর, মানের তালিকা প্রদর্শন করবে। [▲] এবং [▼] বাটন ব্যবহার করে যেকোনো অবস্থানের মান দেখা যায়। ডানদিকে $f(x)$ কলামে কার্সরটি (Cursor) রাখা সুবিধাজনক। এতে ক্যালকুলেটর দশমিকের পর অধিক সংখ্যক অংক প্রদর্শন করে ।

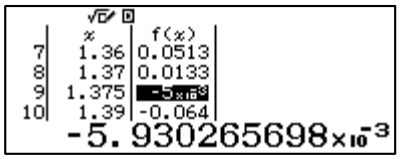
এক্ষেত্রে, $x = 1.3$ এবং $x = 1.4$ এর মধ্যে একটি মূল বিদ্যমান তা বোঝা যায়। কারণ ফাংশনটির মান এই দুই বিন্দুর মাঝে চিহ্ন পরিবর্তন করেছে। অধিক স্পষ্ট ফলাফলের জন্য x =1.3 থেকে শুরু করে $x = 1.4$ পর্যন্ত আরেকটি নতুন তালিকা তৈরি করতে হবে, কিন্তু আরো ছোট ব্যবধান 0.01 নিয়ে। এটি করার জন্য [AC] বাটনটি চাপতে হবে (যা কোনো কিছু মুছে ফেলবে না যদি না এটি পরপর দুই বার চাপা হয়) এবং পূর্বের মতো নতুন মান প্রবেশ করানোর জন্য [=] বাটন চাপতে হবে। কিছু ফলাফল নিচে দেখানো হলো-

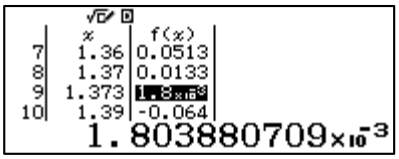


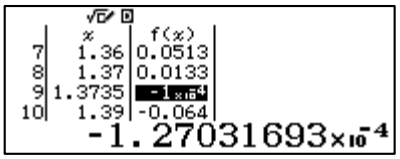
এই পদ্ধতিতে প্রতিবার x এর মান দশমিকের পর এক ঘর বাড়িয়ে ফলাফলের স্পষ্টতা দ্রুতার সাথে বৃদ্ধি করা যায়।

এক্ষেত্রে বোঝা যাচ্ছে যে, $x = 1.37$এবং $x = 1.38$ এর মধ্যে $f(x)$এর একটি মূল বিদ্যমান।

এর একটি ভালো বিকল্প পদ্ধতি রয়েছে। কার্সরটিকে x কলামে স্থাপন করে, হাইলাইট হওয়া x এর মানকে নতুন মান দিয়ে প্রতিস্থাপন করতে হবে। [=] বাটন চাপার সাথে সাথে নতুন বিন্দুতে ফাংশনের নতুন একটি মান প্রদর্শন করবে। নিরীক্ষা ও সমন্বয় (Trial and adjustment) পদ্ধতি বোঝার জন্য স্ক্রিন লক্ষ্য করলে দেখা যাবে x এর পূর্ববর্তী মান 1.38 প্রতিবার 1.375, 1.373 এবং অবশেষে 1.3735 দ্বারা প্রতিস্থাপন করা হয়েছে।

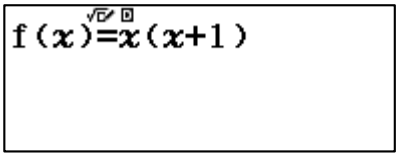


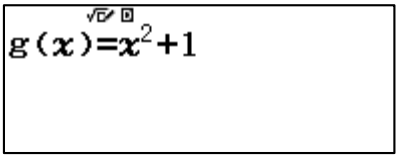




$f(x)$এর মূলের নিকটস্থ এই মানের পর্যায় ক্রমিক পরিবর্তনের কারনে তালিকার অন্য মানগুলোর কোনো পরিবর্তন হবে না। উক্ত উদাহরণ থেকে বোঝা যায় যে, ফাংশনের সাথে সংশ্লিষ্ট গুরুত্বপূর্ণ বিন্দুগুলো (যেমন- মূল, ছেদবিন্দু, চরম মান ইত্যাদি) নির্ণয়ে মানের তালিকা খুবই কার্যকর। পরবর্তী অনুচ্ছেদগুলোতে দেখা যাবে, ফাংশনের অন্যান্য বৈশিষ্ট্যগুলো অনুধাবনে মানের তালিকার যথেষ্ট গুরুত্ব রয়েছে।

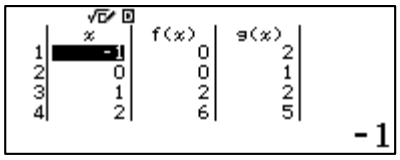
পূর্ববর্তী অনুচ্ছেদে, x এর বিভিন্ন মানের জন্য $x(x+1)$এবং $x^2 + 1$ রাশি দুইটির তুলনা করা হয়েছে। আরো অধিক কার্যকরপদ্ধতি হলো মানের দুইটি তালিকা তৈরি করা যা রাশিদ্বয়ের অনেকগুলো মান এক সাথে দেখতে সাহায্যে করবে। এরপরের স্ক্রিনে দুইটিতে দেখা যাচ্ছে যে, এটি কিভাবে Table *Mode* এর মাধ্যমে করা যায়।

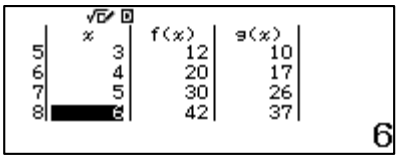


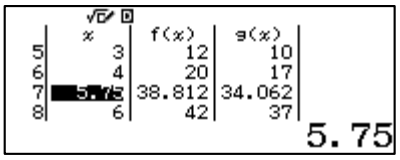


শুরু, শেষ এবং ধাপ নির্ধারণ করা হলো। নিচের ফলাফল থেকে দেখা যাচ্ছে যে, $x = 1$ এর জন্য ফাংশন দুইটির মান সমান। তৃতীয় স্ক্রিনে $x = 5.75$ এর মান পরীক্ষা করা হয়েছে।

লক্ষণীয় যে, ClassWiz এ ফাংশনের মানের তালিকা তৈরি করার জন্য চলক হিসেবে শুধুমাত্র x এবং ফাংশন হিসেবে f ও g ব্যবহারযোগ্য। সুতরাং অন্যান্য চলক যুক্ত ফাংশনকে x এর ফাংশন আকারে প্রবেশ করাতে হবে। উদাহরণস্বরূপ বলা যায় , $h(t) = 5t + 7$ কে এর সমতুল্য ফাংশন $f(x) = 5x + 7$ আকারে প্রবেশ করাতে হবে। সকল সাংখ্যিক মান একই থাকবে; শুধুমাত্র চলক এবং ফাংশনের নাম পরিবর্তন হবে।





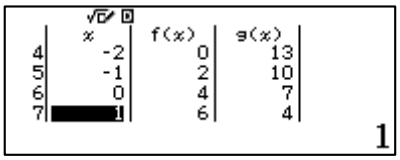


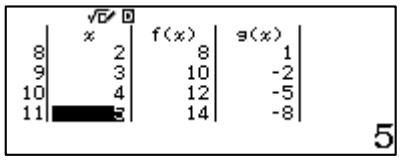
২.৪ রৈখিক এবং দ্বিঘাত ফাংশন (Linear And Quadratic Function)

ধরা যাক, একটি এক ঘাত বিশিষ্ট ফাংশন যার চলকগুলো এক ঘাত সম্বলিত। এখানে দুইটি উদাহরণ দেয়া হলো -

$f(x) = 2x$ এবং $g(x) = 7 - 3x$

মানের তালিকা হতে দেখা যায়, চলকের মানের নির্দিষ্ট পরিবর্তনের সাথে সাথে ফাংশনের মান নির্দিষ্ট পরিমাণে বৃদ্ধি অথবা হ্রাস পায়। নিচের দুইটি স্ক্রিনে বাম পাশে f এবং ডান পাশে g এর মান প্রদর্শিত হয়েছে।

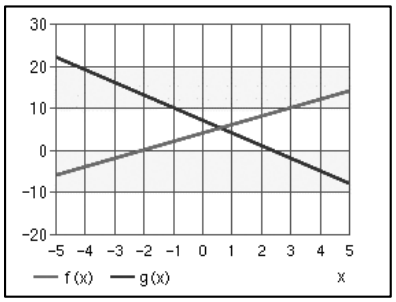




যখন x এর মান 1 বৃদ্ধি পায়, তখন $f(x)$ এর মান 2 করে বৃদ্ধি পায়। একই সাথে $g(x)$ এর মান 3 করে হ্রাস পায়। উপরের স্ক্রিনশটের চেয়ে ক্যালকুলেটরে তালিকার উপরেও নিচে গেলে এটি আরো স্পষ্ট হয়। কেননা উপরের স্ক্রিনশটে মাত্র চার জোড়া মান প্রদর্শিত হয়েছে।

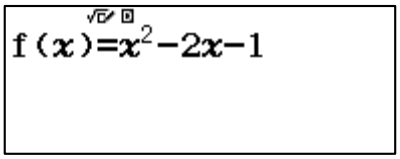
এই ধরণের তালিকা ব্যবহার করে আরো দক্ষতার সাথে কাগজে লেখ চিত্র অঙ্কন করা যায়।

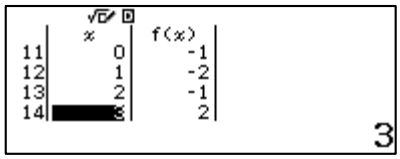
এই পদ্ধতিতে মানের তালিকা এক ঘাত (Linear) ফাংশনের লেখ চিত্র সম্পর্কে ধারণা করতে সাহায্য করে। এখানে $f(x)$ একটি ক্রমবর্ধমান ফাংশন যার ঢাল 2। অপর দিকে $g(x)$ অধিক ক্রমহ্রাসমান ফাংশন যার ঢাল -3। নিচের লেখচিত্র হতে দেখা যাচ্ছে যে, প্রত্যেকটি ফাংশনকে একটি রেখার মাধ্যমে উপস্থাপন করা যায়। এই কারণে এদের রৈখিক (Linear) ফাংশন বলা হয়।



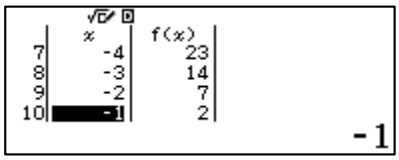
উপরের লেখ চিত্রটি QR কোডের মাধ্যমে ওয়েব সাইট হতে বের করার জন্য QR কোড জেনারেটর অ্যাপ থাকতে হবে। প্রথমে মানের তালিকা বের করতে হবে। এরপর SHIFT OPTN চাপলে ক্যালকুলেটর একটি QR কোড প্রদর্শন করবে। স্মার্টফোনের মাধ্যমে এই কোডটি স্ক্যান করলে CASIO এর ওয়েব পেইজে লেখচিত্র এবং সেই সাথে ফাংশনটির আরও অন্যান্য বৈশিষ্ট্য প্রদর্শিত হবে। খেয়াল রাখতে হবে যে, স্মার্টফোনের ইন্টারনেট ফাংশন চালু আছে কিনা।

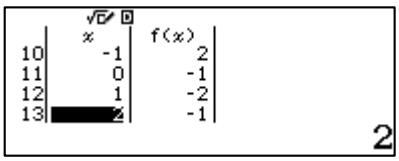
দ্বিঘাত ফাংশনে একটি দ্বিঘাত সম্বলিত চলক থাকে এবং এর বৈশিষ্ট্য রৈখিক ফাংশন থেকে ভিন্ন। চলকের মানের একই পরিমাণ পরিবর্তনের সাথে ফাংশনের মান নিয়মিতোভাবে পরিবর্তিত হয় না। উদাহরণস্বরূপ, একটি দ্বি ঘাত ফাংশন $f(x) = x^2 - 2x - 1$, যার মানের তালিকা নিচে দেওয়া হয়েছে। যখন x এর মান 1 হতে 2 তে বৃদ্ধি পায়, তখন ফাংশনের মান 1 বৃদ্ধি পেয়ে -2 থেকে -1 হয়। কিন্তু যখন x এর মান 2 থেকে 3-তে পরিবর্তিত হয় তখন ফাংশনের মান 3 একক বৃদ্ধি পেয়ে -1 থেকে 2-এ যায়। রৈখিক ফাংশনের মতো বৃদ্ধিটি নিয়মিত নয়।

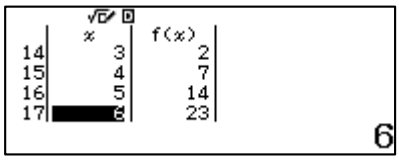




টেবিলের উপরে থেকে নিচে গেলে অথবা নিচে থেকে উপরে গেলে দেখা যায়, $x = 1$এর ডান এবং বাম পাশে ফাংশনের মান একই ভাবে বৃদ্ধি পায়; প্রকৃতপক্ষে $x = 1$ এর উভয় পাশে ফাংশনের মান একই থাকবে, যার সর্বনিম্ন মান $f(x) = -2$।



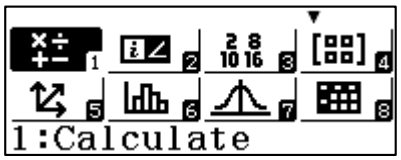


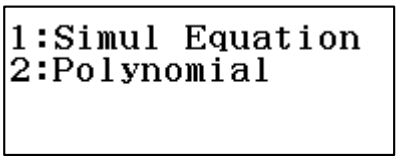


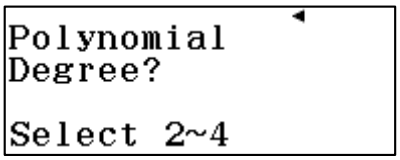
পুনরায়, এই ধরনের মানের তালিকা ফাংশনের লেখচিত্র দক্ষতার সাথে অংকন করতে সাহায্য করে।

সর্বনিম্ন মান $f(1) = -2$ থেকে শুরু করে x এর মান উভয় দিকে এক একক বাড়ার সাথে সাথে ফাংশনের মান 1,3,5,7 এভাবে বৃদ্ধিপ্রাপ্ত হয় ।

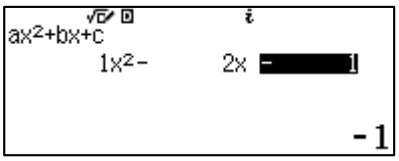
যদিও ফাংশনের বৈশিষ্ট্য বোঝার জন্য লেখচিত্র সুবিধাজনক, মানের তালিকা ফাংশনের লেখচিত্রের আকার এবং এর বৈশিষ্ট্য সম্পর্কে ধারণা দেয়। ClassWiz দ্বিঘাত ফাংশনের লেখচিত্রের বৈশিষ্ট্য বোঝার জন্য আরো অধিক তথ্য দিতে সক্ষম। MENU (−) ব্যবহার করে Equation/Function *mode*-এ যেতে হবে। এরপর নিচের মতো করে 2 ঘাত যুক্ত Polynomial ফাংশন নির্ধারণ করতে হবে।



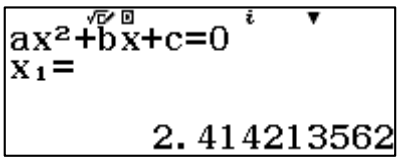


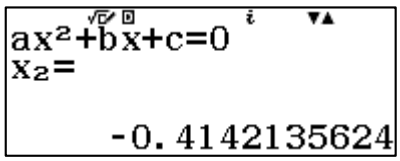


দ্বিঘাত ফাংশনের তিনটি সহগ $1, -2$ এবং -1 প্রত্যেকটির পরে (=) বাটন চেপে প্রবেশ করাতে হবে।

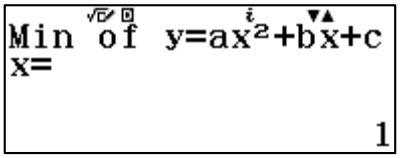


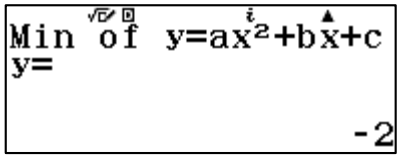
তারপর আবার (=) বাটন চাপলে ফাংশনটির দুইটি মূল x_1 ও x_2 নিচের মতো করে প্রদর্শন করবে।





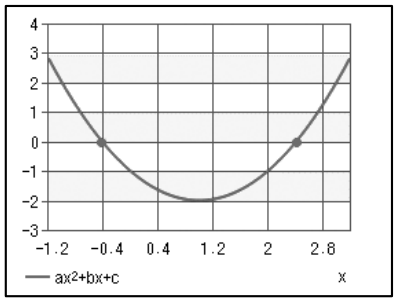
সবশেষে, (=) দুই বার চাপলে $(1, -2)$ বিন্দুতে পরাবৃত্তের চরম মানের স্থানাংক $(1, -2)$ প্রদর্শন করবে।





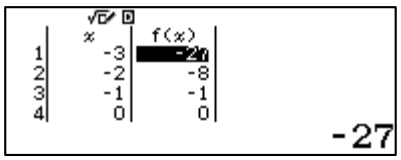
মূল, চরম মান এবং তালিকা মান জানা থাকলে দ্বিঘাত ফাংশনের লেখচিত্র অংকন করা সহজ হয়ে যায়।

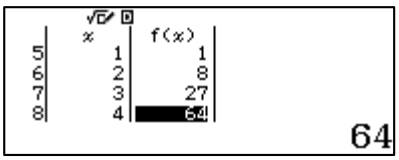
উপরের বর্ণনাগুলো লেখচিত্রে দৃশ্যমান, যেটি দেখাচ্ছে যে, সর্বনিম্ন মান $(1, -2)$ বিন্দুগামী পরাবৃত্তটির একটি প্রতিসাম্য রেখা রয়েছে। যা y অক্ষের সমান্তরাল এবং যার সমীকরণ $x = 1$।

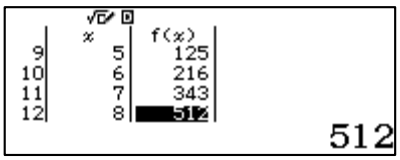


২.৫ ত্রিঘাত ফাংশন

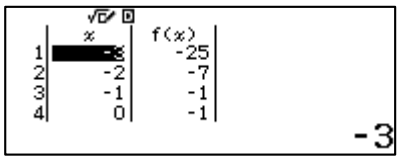
ত্রিঘাত ফাংশনে চলকের সর্বোচ্চ ঘাত তিন হয়ে থাকে। রৈখিক এবং দ্বিঘাত ফাংশনের মতো তালিকা পদ্ধতি নির্দিষ্ট ত্রিঘাত ফাংশনের বৈশিষ্ট্য বোঝার জন্য সহায়ক। উদাহরণ হিসেবে নিচের তালিকা হতে দেখা যাচ্ছে যে, ত্রিঘাত ফাংশন $f(x) = x^3$ বৃদ্ধি পাচ্ছে, যদিও তা রৈখিকভাবে নয় এবং এর মান $x < 0$ এর জন্য ঋণাত্মক এবং $x > 0$ এর জন্য ধনাত্মক।

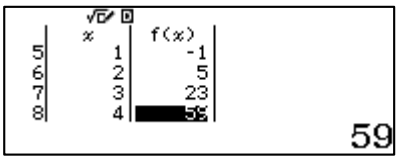


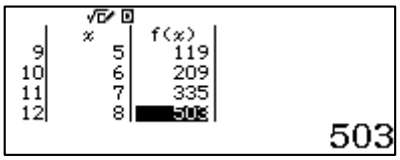




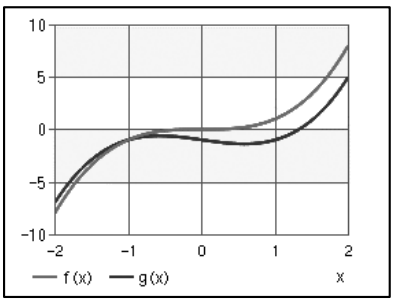
যেখানে এই ত্রিঘাত ফাংশন মূলবিন্দু $x = 0$ এর সাপেক্ষে প্রতিসম, কিন্তু অন্যান্য ত্রিঘাত ফাংশনের তা নয়। পুনরায়, মানের একটি তালিকা ফাংশনের লেখচিত্রের আকৃতি সম্পর্কে অন্তঃদৃষ্টি প্রদান করে নিচের টেবিলে ভিন্ন একটি ত্রিঘাত ফাংশন $f(x) = x^3 - x - 1$ দেখানো হয়েছে, যা মূল বিন্দুর সাপেক্ষে প্রতিসাম্য নয়।



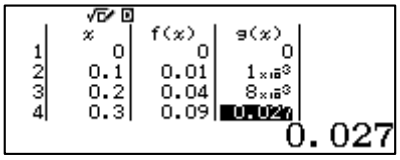




এই দুইটি তালিকা উক্ত দুইটি ত্রিঘাত ফাংশনের লেখচিত্র সম্পর্কে কল্পনা করতে সাহায্য করে যা নিচে QR কোডের মাধ্যমে অর্জিত লেখচিত্রে দেখানো হয়েছে যেখানে $f(x) = x^3 - x - 1$ ও $g(x) = x^3$। লেখচিত্রটি এটি স্পষ্ট করে যে, ত্রিঘাত ফাংশনের বিভিন্ন রকম আকৃতি রয়েছে (যা রৈখিক ফাংশন যেটির আকৃতি শুধুমাত্র রৈখিক এবং দ্বিঘাত ফাংশন যেটির আকৃতি শুধুমাত্র পরাবৃত্তাকার, এর মতো নয়)।

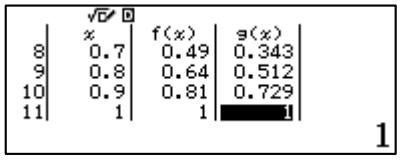


মানের তালিকা দ্বিঘাত এবং ত্রিঘাত ফাংশনের মধ্যেও তুলনা করতে সাহায্য করে। উদাহরণস্বরূপ দুইটি ফাংশন $f(x) = x^2$ এবং $g(x) = x^3$ যদি একই ডোমেনের ভিতরে মানের তালিকার দিকে ভালোভাবে লক্ষ্য করা হয়, তাহলে দেখা যাবে যে, $0 < x < 0.5$ এর ভিতর দ্বিঘাত ফাংশনের চেয়ে ত্রিঘাত ফাংশন ধীর গতিতে বৃদ্ধি প্রাপ্ত হচ্ছে এবং $1 < x < 2$ এর ভেতর দ্রুত গতিতে বৃদ্ধিপ্রাপ্ত হচ্ছে। এই পার্থক্য অনুধাবন করার জন্য ধরা যাক, $0 < x < 1$এর জন্য মানের তালিকা-



	x	f(x)	g(x)
1	0	0	0
2	0.1	0.01	1×10⁻³
3	0.2	0.04	8×10⁻³
4	0.3	0.09	0.027

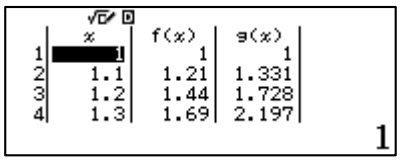
0.027



	x	f(x)	g(x)
8	0.7	0.49	0.343
9	0.8	0.64	0.512
10	0.9	0.81	0.729
11	1	1	1

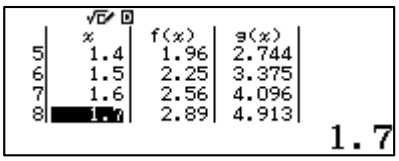
1

লক্ষনীয় যে $1 < x < 2$-এর ভিতরে নিচের তালিকাতে মানগুলো ভিন্নরকম। এক্ষেত্রে ত্রিঘাত ফাংশনের মান দ্বিঘাত ফাংশনের চেয়ে দ্রুত বৃদ্ধি পাচ্ছে।



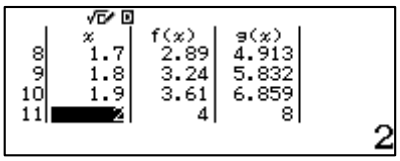
	x	f(x)	g(x)
1	1	1	1
2	1.1	1.21	1.331
3	1.2	1.44	1.728
4	1.3	1.69	2.197

1



	x	f(x)	g(x)
5	1.4	1.96	2.744
6	1.5	2.25	3.375
7	1.6	2.56	4.096
8	1.7	2.89	4.913

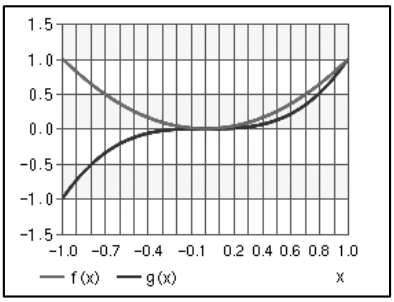
1.7



	x	f(x)	g(x)
8	1.7	2.89	4.913
9	1.8	3.24	5.832
10	1.9	3.61	6.859
11	2	4	8

2

উভয় ফাংশনের লেখচিত্র সরলরৈখিক নয়, বরং বক্ররেখা। কিন্তু বক্ররেখাগুলো একটি হতে অন্যটি আলাদা। নিচের লেখচিত্রে এই বৈশিষ্ট্যগুলোও স্পষ্ট।



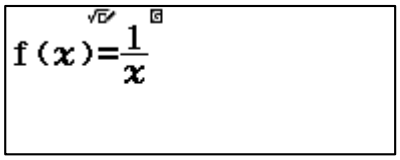
২.৬ মূলদ (Rational) ফাংশন

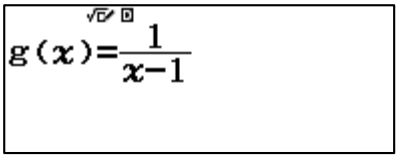
মূলদ ফাংশন হলো ভগ্নাংশ আকারের ফাংশন যার হরে একটি চলকযুক্ত রাশি থাকে।

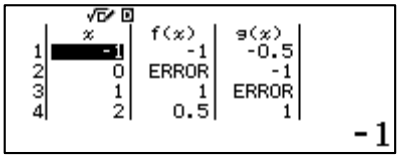
মূলদ ফাংশন একই পদ্ধতিতে পর্যবেক্ষণ করা যায়। মূলদ ফাংশনের দুইটি উদাহরণ বিবেচনা করা যাক,

$f(x) = \frac{1}{x}$ এবং $g(x) = \frac{1}{x-1}$

মানের তালিকা তৈরি করলে একটি নির্দিষ্ট বৈশিষ্ট যেখানে হরের মান শূন্য, তা সাথে সাথেই স্পষ্ট হয়ে যায়। এক্ষেত্রে $f(x)$ এর তালিকায় $x = 0$ এবং $g(x)$ এর তালিকায় $x = 1$ অন্তর্ভুক্ত।



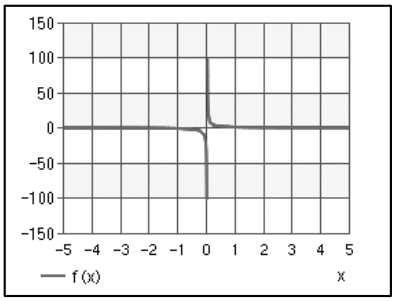




কারণ হর শূন্য হলে তার মান অসংজ্ঞায়িত হয়, তাই $f(0)$ এবং $g(1)$ এর মান নেই। সেজন্য ক্যালকুলেটর উভয়ক্ষেত্রে ERROR দেখায়।

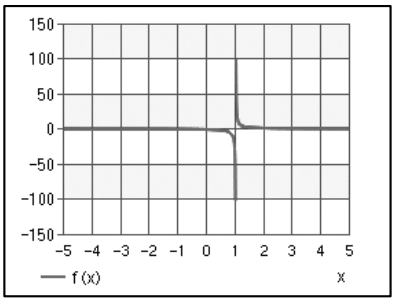
এই ধরনের বিচ্ছিন্নতার ক্ষেত্রে মূলদ ফাংশনের বৈশিষ্ট্য হলো যে এদের মান এই অনুচ্ছেদে আলোচ্য অন্যান্য ফাংশনের মতো সহজ এবং নিরবিচ্ছিন্নভাবে পরিবর্তিত হয় না। বরং 'হঠাৎ' পরিবর্তিত হয়, যার ফলে এই ধরনের ফাংশনের দুইটি আলাদা লেখচিত্র থাকে।

উপরের মূলদ ফাংশন বিবেচনা করলে, কিছু তালিকাবদ্ধ মান এই ঘটনা দৃশ্যমান করে। নিচের স্ক্রিনগুলো ভালো করে লক্ষ্য করা যাক



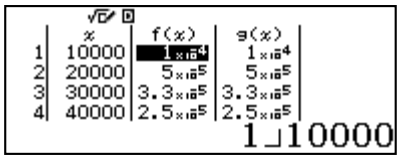
$f(x) = \frac{1}{x}$

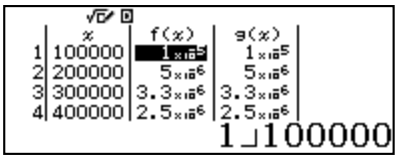
তালিকাবদ্ধ মানগুলো পর্যবেক্ষণে এটি প্রতীয়মান হয় যে $x > 0$ এর জন্য $f(x)$ এর মান ধনাত্মক এবং $x < 0$ এর জন্য $f(x)$এর মান ঋণাত্মক। অপরদিকে $x > 1$ এর জন্যে $g(x)$এর মান ধনাত্মক এবং $x < 1$এর জন্য $g(x)$এর মান ঋণাত্মক। এছাড়া আরো প্রতীয়মান হয় যে, 0 এর উভয় পাশে $f(x)$ এর মান একে অপরের বিপরীত, যা নির্দেশ করে $x = 0$ তে ফাংশনটি প্রতিসম। $g(x)$ এর মান নির্দেশ করে যে এটি $x = 1$ এর সাপেক্ষে প্রতিসম। এই ধরনের মানের তালিকা লেখ কাগজে ফাংশনের লেখচিত্র অংকন করতে সাহায্য করে। QR কোড হতে প্রাপ্ত এই দুইটি ফাংশনের লেখচিত্রে এই ধরনের বৈশিষ্ট্যগুলো প্রতীয়মান হয়।

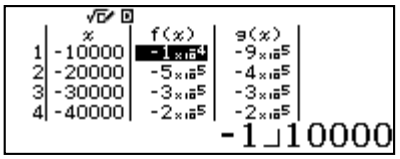


$f(x) = \frac{1}{x-1}$

মূলদ ফাংশনের আরেকটি বৈশিষ্ট্য হলো x এর অসীম ধনাত্মক ও ঋণাত্মক মানের জন্য ফাংশনের মান $y = 0$ এর কাছাকাছি অবস্থান করে। মানগুলো কখনোই শূন্য হয় না বরং $x > 0$ এর জন্য তা সবসময়ই ধনাত্মক এবং $x < 0$ এর জন্য সবসময়ই ঋণাত্মক। অনেক বড় মান নিয়ে পর্যবেক্ষণ করলে এটি বোঝা যায়। নিচের উদাহরণগুলোতে তা দেখানো হলো-







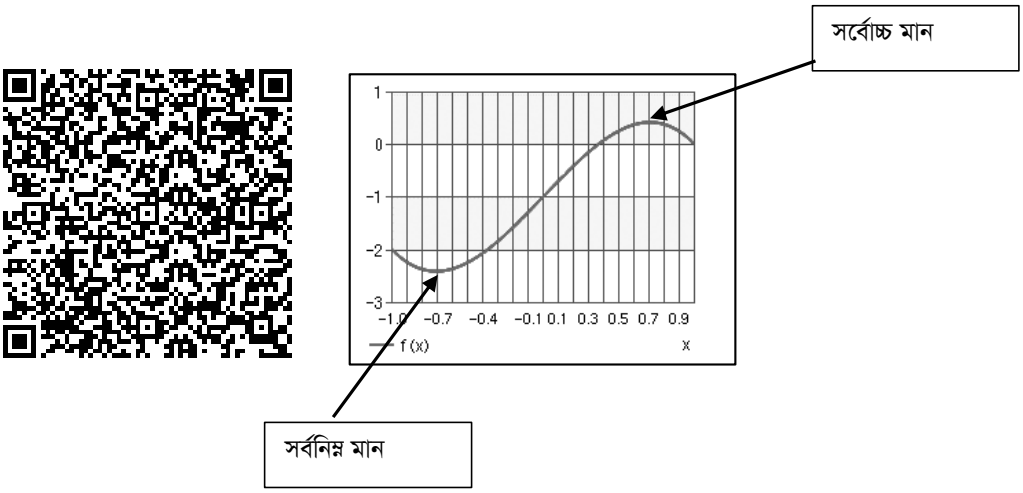
এই দুইটি নির্দিষ্ট ফাংশনের জন্যে $y = 0$ একটি অসীমতোট রেখা। ফাংশনের মান 0 এর নিকটবর্তী হতে থাকে, কিন্তু কখনোই 0 তে পৌছায়না। অসীমতোট রেখা উচ্চতর গণিতে খুবই গুরুত্বপূর্ণ এবং মূলদ ফাংশনের ক্ষেত্রে এটি দেখা যায়।

মূলদ ফাংশন যেহেতু ভগ্নাংশ আকারের ফাংশন তাই এর হরের মান কখনো শূন্য হতে পারেনা। কেননা হরের মান শূন্য হলে ফাংশনটির মান অসংজ্ঞায়িত হয়ে যায়। x এর যেসকল মানের জন্য হরের মান শূন্য হয়ে যায় ঐ সকল মান ফাংশনটির ডোমেনের অন্তর্ভূক্ত হয়না। যেমন $f(x) = \frac{1}{x-3}$ ফাংশনটির মান $x = 3$ এর জন্য অসংজ্ঞায়িত। তাই ফাংশনটির ডোমেন হবে $\boldsymbol{R} - \{3\}$। আর ডোমেনের সকল মানের জন্য প্রাপ্ত মানগুলো হলো ফাংশনের রেঞ্জ।

একই ভাবে $f(x) = \sqrt{(1-x)}$ ফাংশনের ডোমেন হবে $x \leq 1$, কেননা x এর মান যদি 1 এর চাইতে বড় হয় তাহলে ফাংশনটির মান জটিল সংখ্যা হয়।

২.৭ সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্নমান

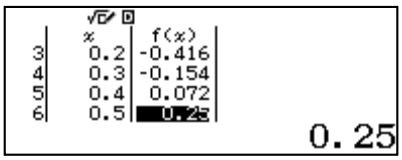
বহুঘাত বিশিষ্ট ফাংশনের সর্বোচ্চ অথবা সর্বনিম্ন মান থাকে। দ্বিঘাত ফাংশনের সর্বোচ্চ অথবা সর্বনিম্নমান থাকে, যেখানে ত্রিঘাত ফাংশন গুলোর উভয়ই থাকতে পারে , যা ফাংশনের লেখচিত্রে 'লুপ' (চক্র) দ্বারা নির্দেশিত হয়। $f(x) = 3x - 2x^3 - 1$এর লেখচিত্রে (QR কোডের মাধ্যমে প্রাপ্ত) দেখা যায়, $x = 0$ এবং $x = 1$এর মধ্যে ফাংশনের একটি সর্বোচ্চ মান রয়েছে এবং $x = -1$ এবং $x = 0$ এর মধ্যে একটি সর্বনিম্ন মান রয়েছে।

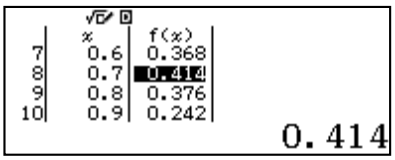


লক্ষণীয় যে, এই মানগুলো আপাতদৃষ্টিতে শুধুমাত্র 'সর্বোচ্চ' অথবা 'সর্বনিম্ন' মান। উদাহারণস্বরূপ বলা যায়, $x < -2$ এর জন্য ফাংশনের মান $x = 0$ ও $x = 1$ এর ভিতরের যেকোনো মানের চেয়ে বৃহত্তম। এক্ষেত্রে $x = 0$ এবং $x = 1$ এর ভিতরে একটি চরম মান রয়েছে।

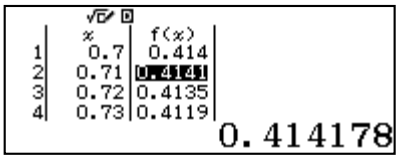
মানের তালিকায় একটি ক্ষুদ্র ব্যবধির মধ্যে ফাংশনের সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্নমান পর্যবেক্ষণ করা সুবিধাজনক। এক্ষেত্রে $f(x) = 3x - 2x^3 - 1$এর মান $x = 0$ এবং $x = 1$ ব্যবধির মধ্যে নেয়া হয়েছে।

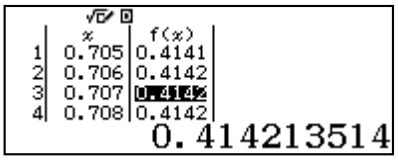
মানের তালিকা হতে দেখা যায় যে, $x = 0.6$ এবং $x = 0.8$ এর মধ্যে ফাংশনের একটি সর্বোচ্চ মান রয়েছে।

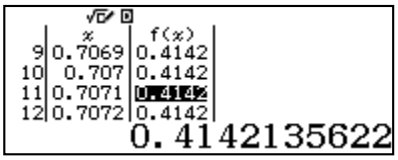




আরো সূক্ষ্মভাবে ফাংশনের সর্বোচ্চ মান পর্যবেক্ষণ করার জন্য x এর ক্ষুদ্র থেকে ক্ষুদ্রতর মান আরো ছোট ব্যবধানে নিতে হবে। সর্বোচ্চ মানের জন্য টেবিলের উপরে নীচে লক্ষ্য করতে হবে। নিচের স্ক্রিনগুলো থেকে প্রতীয়মান যে, $0.01, 0.001$ এবং 0.0001 ব্যবধান নিয়ে এই পদ্ধতিটির পুনরাবৃত্তি করা হয়েছে-

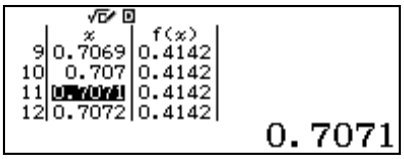


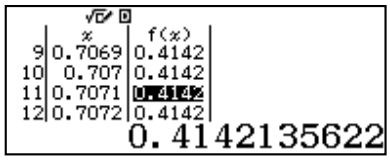




লক্ষণীয় যে, সর্বশেষ স্ক্রিনে সকল তালিকাবদ্ধ মান একই এবং তা 0.4142, কারণ তালিকাটি শুধুমাত্র চার দশমিক স্থান পর্যন্ত প্রদর্শন করতে সক্ষম। অধিক সূক্ষ্মমান কার্সরটি $f(x)$ কলামে নিয়ে যাওয়ার মাধ্যমে দেখা সম্ভব।

আরো সূক্ষ্মভাবে দেখার জন্য ব্যবধান 0.00001 নেওয়া হলো। এবারো উভয় কলামের মানগুলো একই, আর তা তালিকার আকারের সীমাবদ্ধতার কারণে। যেকোনো কলামে গেলে আরো সূক্ষ্মমান দেখা সম্ভব।





এই ফাংশনের ক্ষেত্রে $x \approx 0.7071$এর নিকটে একটি স্থানিক সর্বোচ্চ মান থাকতে পারে যার জন্য $f(x) \approx 0.41421$. এই পদ্ধতিতে আরো ক্ষুদ্র থেকে ক্ষুদ্রতর ব্যবধান নিলে আরো নিখুঁত ফলাফল পাওয়া সম্ভব।

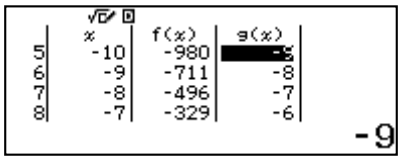
একই পদ্ধতিতে ফাংশনের আপেক্ষিক সর্বনিম্ন মান বের করা যায়। এই ফাংশনটির সর্বনিম্ন মান -2.4142 যা $x \approx -0.4142$ এর নিকটবর্তী।

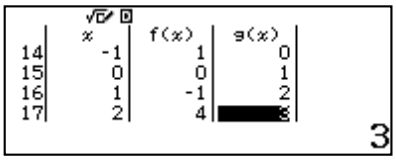
২.৮ দুটি লেখচিত্রের ছেদ বিন্দু

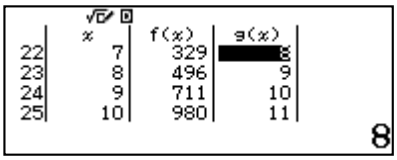
উপরের বর্ণনা অনুযায়ী ক্যালকুলেটরটি ফাংশনের গুরুত্বপূর্ণ গাণিতিক ধারণাগুলো কল্পনা করতে সহায়তা করে, যদিও এটির লেখচিত্র অঙ্কনের সামর্থ্য নেই। আরও একটি ভাল উদাহরণ হলো ফাংশনের লেখচিত্রের ছেদবিন্দু। নিচের দুটি ফাংশন বিবেচনা করা যাক -

$$f(x) = x^3 - 2x \text{ ও } g(x) = 1 + x$$

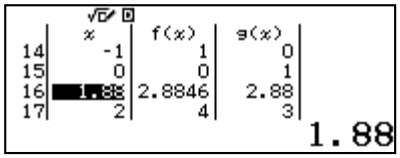
ফাংশন দুটির লেখচিত্র পরপর সেই বিন্দুতে ছেদ করবে যেখানে তাদের একটি সাধারণ বিন্দু থাকবে, যেখানে x ও y এর মান একই।

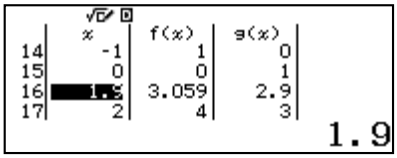


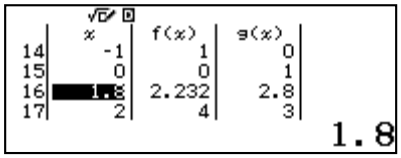




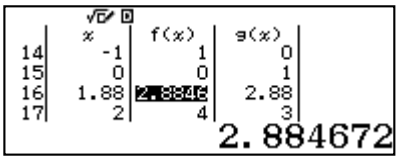
তালিকাবদ্ধ এই মানগুলো হতে বোঝা যায় যে মূল বিন্দুর কাছাকাছি $-1 < \mathrm{x} < 2$ এর ভেতর ফাংশনের মানগুলো একে অন্যের খুব কাছাকাছি $\mathrm{x} = 1$ ও $\mathrm{x} = 2$ এর ভিতরে একটি ছেদবিন্দু রয়েছে। এই বিন্দুটি নির্দিষ্টভাবে বের করার জন্য কার্সরটি x কলামে নিয়ে ($x = 1$ সহযোগে) x এর মানের একটি ভাল অনুমান করতে হবে যার জন্য $f(x)$ ও $g(x)$এর মান একই হবে তারপর [=] বাটন চাপতে হবে। প্রথম স্ক্রিনে দেখা যাচ্ছে যে, $x = 1.8$ নিলে তা কিছুটা ছোট হয় এবং সেক্ষেত্রে $f(x) < g(x)$.

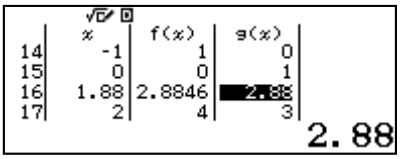






দ্বিতীয় স্ক্রিন হতে দেখা যাচ্ছে যে, $x = 1.9$ নিলে তা কিছুটা বড় হচ্ছে আর এক্ষেত্রে $f(x) > g(x)$। আরও কিছু অনুমানের পর আমাদের তৃতীয় স্ক্রিন হতে দেখা যাচ্ছে যে $x = 1.88$ অনেকটা কাছাকাছি যদিও কিছুটা কম। নিচে লক্ষ্য করলে দেখা যাবে যে $f(1.88)$ ও $g(1.88)$ খুবই নিকটবর্তী যা থেকে ধারণা করা যায় যে $x = 1.88$ এর আশেপাশে কোথাও ফাংশনটির ছেদবিন্দু রয়েছে।





লক্ষণীয় যে, এই মানগুলো পুরোপুরি সঠিক নয় (কারন সমাধানটি অনুমিত)।

$$f(1.88) = 1.88^3 - 2 \times 1.88 = 2.884672$$

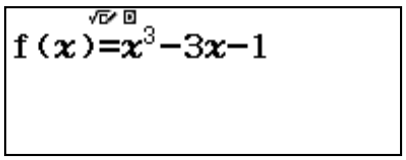
$$g(1.88) = 1 + 1.88 = 2.88$$

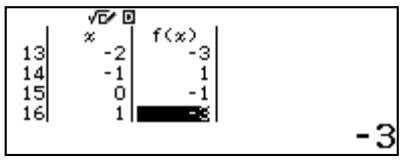
সুতরাং লেখচিত্রের ছেদবিন্দু সম্পর্কে একটি ভাল অনুমান হচ্ছে $(1.88, 2.88)$.

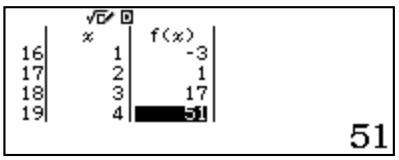
দুইটি ফাংশনের তুলনা করার চাইতে ছেদ বিন্দু নির্ণয়ের আরও একটি ভাল উপায় হলো কোথায় একটি অন্তরফল (ডিফারেন্স) ফাংশনের মান শূন্য তা খুঁজে বের করা। সুতরাং অন্তরফল (ডিফারেন্স) ফাংশন $d(x)$ এর মান তালিকা বের করতে হবে যেখানে,

$$d(x) = f(x) - g(x) = x^3 - 3x - 1$$

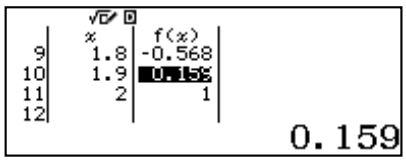
লেখচিত্রের ছেদবিন্দু সেটিই যেখানে অর্ন্তফল (ডিফারেন্স) ফাংশনের মান শূন্য। লেখচিত্র দুটি কোথায় ছেদ করতে পারে সে সম্পর্কে স্বল্প ধারণা থাকা সত্ত্বেও একটি মানের তালিকা তৈরির জন্য ভাল পছন্দ হলো $x = -14$ থেকে শুরু করে $x = 15$ ও একক ব্যবধান। x এর যে মানের জন্য $f(x)$ শূন্যতা খুঁজে বের করার জন্য তালিকার উপরে নিচে খুঁজলে সম্ভাব্য তিনটি ব্যবধি পাওয়া যাবে, যা নিচে দেখানো হয়েছে -

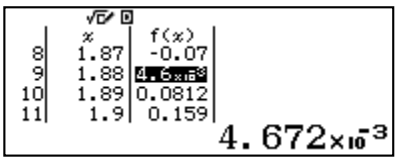


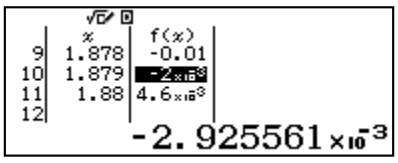




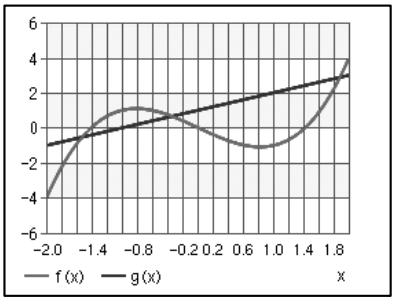
যখন ত্রিঘাত ফাংশনটির চিহ্ন পরিবর্তিত হয় (হয় ঋণাত্মক হতে ধনাত্মক দিকে নতুবা বিপরীতক্রমে) এটি শূন্য বিন্দুকে অতিক্রম করবে। সুতরাং, শূন্য বিন্দুটি $-2 < x < -1, -1 < x < 0$ এবং $1 < x < 2$ এর মধ্যে থাকার সম্ভাবনা রয়েছে। আমরা এখানে এই তিনটি ব্যবধির শুধুমাত্র শেষেরটিই নিরীক্ষা করব। বারংবার মানের তালিকা এভাবে ছোট করলে ফলাফলের মান আরও সূক্ষ্ম হবে। নিচের তিনটি তালিকা থেকে মানটি বের করার অনুক্রমটি ভাল করে লক্ষ্য করলে দেখা যাবে যে, যেখানে প্রতিটি ব্যবধিকেই দশটি করে মান নেয়া হয়েছে। ব্যবধিগুলো হলো $1 < x < 2, 1.8 < x < 1.9$এবং $1.87 < x < 1.88$.





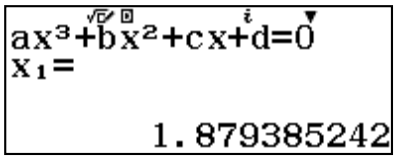


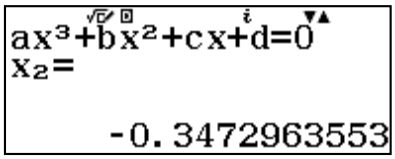
লক্ষনীয় যে, তালিকার জন্য ব্যবধান প্রত্যেকবার ক্রমান্বয়ে $0.1, 0.1$ এবং 0.001 এভাবে কমেছে। এর ফলে ক্যালকুলেটর ক্রমানুযায়ী প্রতিটি তালিকায় দশমিকের পর আরও অধিক স্থান পর্যন্ত সঠিক ফলাফল প্রদর্শন করবে। এই পদ্ধতি আরও পুনরাবৃত্তি করা সম্ভব। কিন্তু আমরা এখানেই থেমে যাব কেননা $x \approx 1.88$ ভাল একটি আসন্ন মান যা দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত সঠিক এবং প্রথম পদ্ধতির সঙ্গে সামঞ্জস্যপূর্ণ। QR কোডের মাধ্যমে প্রাপ্ত নিচের লেখচিত্র দুটি থেকে দেখা যাচ্ছে যে কিভাবে একটি ফাংশনের মূল খুঁজে বের করার মাধ্যমে দুটি ফাংশনের লেখচিত্রের ছেদবিন্দু অনুমান করা যায়।

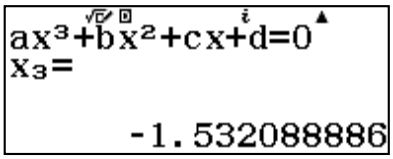


লক্ষণীয় যে একটি ছেদবিন্দু, উপরে প্রাপ্ত মানের কাছাকাছি এবং অন্তরফল (ডিফারেন্স) ফাংশনের একটি মূল $x = 1.88$ এর নিকটবর্তী।

ClassWiz এর মাধ্যমে Equation *mode* ব্যবহার করে ত্রিঘাত সমীকরণ $x^3 - 3x - 1 = 0$ এর তিনটি সমাধান বের করা যায় যা নিচে দেখানো হয়েছে।





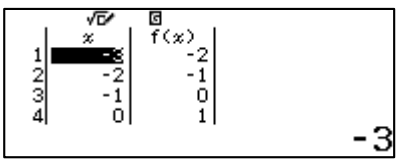


যা থেকে মানের তালিকা ব্যবহার করে এখানে বর্ণনা করা পদ্ধতিগুলো অন্যান্য জোড়া ফাংশনের ক্ষেত্রেও ব্যবহার করা যায় যা Equation *mode* এর মাধ্যমে করা যায়না, এবং ফাংশনের মানগুলো কিভাবে সম্পর্কিত সেটি সম্পর্কেও ভাল ধারণা দেয়।

উদাহরণমালা

১. $S = \{(x, y) - x \in A$ এবং $y - x = 1\}$, যেখানে $A = \{-3, -2, -1, 0\}$, S ফাংশনটির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় করতে হবে।

সমাধান- প্রথমে $y - x = 1$ কে এর সমতোল্য ফাংশন $y = x + 1 \Rightarrow f(x) = x + 1$ আকারে প্রকাশ করে ক্যালকুলেটরে প্রবেশ করাতে হবে। এরপরে Start, End এবং Step হিসেবে যথাক্রমে $-3, 0$ ও 1 প্রবেশ করাতে হবে। তাহলে নিচের স্ক্রিনের মতো একটি মানের তালিকা পাওয়া যাবে, যেখানে x কলামের মানগুলো ডোমেন এবং $f(x)$ কলামের মানগুলো y এর মান বা ফাংশনটির রেঞ্জ।

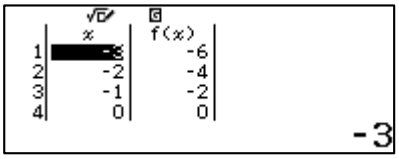


(Key log- MENU 9 x + 1 = = − 3 = 0 = 1 = =)

লক্ষনীয় যে, এখানে x এর প্রতিটি মানের জন্য y এর বাস্তব মান পাওয়া গেছে। যদি x এর কোনো মানের জন্য y এর বাস্তব মান না পাওয়া যায় বা ক্যালকুলেটরে ERROR দেখায় তাহলে x এর ঐ মানটি ডোমেনের অন্তর্ভুক্ত হবেনা।

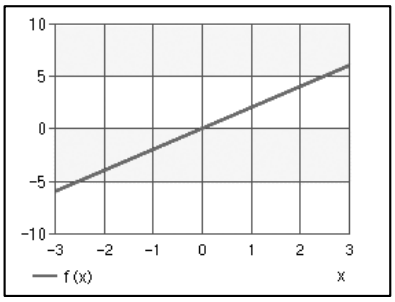
২. $y = 2x$ এর লেখচিত্র $-3 \leq x \leq 3$ এর মধ্যে অংকন করতে হবে।

সমাধান- প্রথমে $y = 2x$ এর সমতুল্য ফাংশন $f(x) = 2x$ আকারে ক্যালকুলেটরে প্রবেশ করাতে হবে। এরপর Start, End এবং Step হিসেবে যথাক্রমে $-3,3$ ও 1 প্রবেশ করালে একটি মানের তালিকা পাওয়া যাবে। এই মানগুলো ছক কাগজে বসিয়ে (x কলামের মান ভুজ এবং $f(x)$ কলামের সংশ্লিষ্ট মানগুলো হলো কোটি) লেখচিত্র পাওয়া যাবে।



(Key log- [MENU] [9] [2] [x] [=] [=] [−] [3] [=] [3] [=] [1] [=] [=])

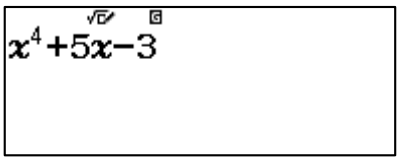
(Key log- [SHIFT] [OPTN])

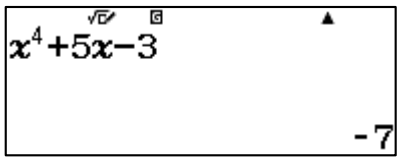


উপরের লেখচিত্রটি QR কোডের মাধ্যমে প্রাপ্ত।

৩. $f(x) = x^4 + 5x - 3$ ফাংশনটির মান $x = -1, 2$ এবং $\frac{1}{2}$ বিন্দুতে অর্থাৎ $f(-1), f(2), f(\frac{1}{2})$ এর মান বের করতে হবে।

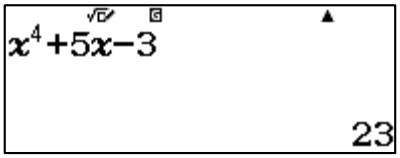
সমাধান- প্রথমে $x^4 + 5x - 3$ ক্যালকুলেটরে প্রবেশ করাতে হবে। এরপর [CALC] বাটন চাপলে নিচের প্রথম স্ক্রিনের মতো একটি স্ক্রিন প্রদর্শিত হবে। এরপর x এর মান -1 বসিয়ে দুইবার [=] বাটন চাপলে $f(-1)$ এর মান বের হবে যা দ্বিতীয় স্ক্রিনে দেখানো হয়েছে।

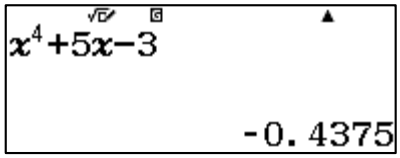




(Key log- [x] [$x^{\blacksquare}$] [4] [▶] [+] [5] [x] [−] [3] [CALC] [−] [1] [=] [=])

আবার [=] বাটন চেপে x এর দ্বিতীয় মান 2 প্রবেশ করিয়ে পর পর দুই বার [=] চাপলে নিচের প্রথম স্ক্রিনের মতো মান দেখাবে।একই ভাবে তৃতীয় মানের জন্য অনুরূপ পদ্ধতি অবলম্বন করতে হবে যার ফলাফল নিচের দ্বিতীয় স্ক্রিনে দেখানো হয়েছে।





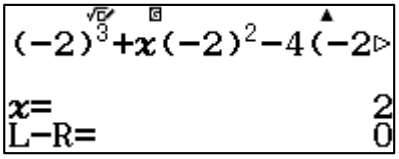
(Key log- [=] [2] [=] [=] [=] [1] [▭/▭] [2] [=] [=])

৪. $f(x) = y^3 + ky^2 - 4y - 8$ ফাংশনটির অন্তর্গত k এর যে মানের জন্য $f(-2) = 0$ হবে তা বের করতে হবে।

সমাধান- প্রথমে y এর স্থলে -2 এবং k এর স্থলে x বসিয়ে নিচে প্রদর্শিত স্ক্রিনের মতো

$$(-2)^3 + x(-2)^2 - 4(-2) - 8 = 0$$

ক্যালকুলেটরে প্রবেশ করাতে হবে। এরপর [SHIFT] চেপে [CALC] বাটন চাপার পর [=] চাপলে নিচের স্ক্রিনের মতো x (k এর মান) এর মান পাওয়া যাবে। এক্ষেত্রে x এর মান $x = 2$.

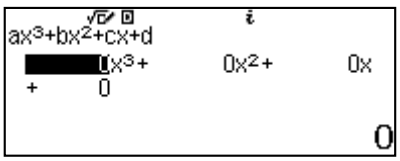


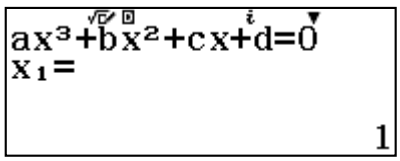
(Keylog-
[(] [−] [2] [)] [SHIFT] [x²] [+] [x] [(] [−] [2] [)] [x²] [−] [4] [(] [−] [2] [)] [−] [8] [ALPHA] [CALC] [0] [SHIFT] [CALC] [=])

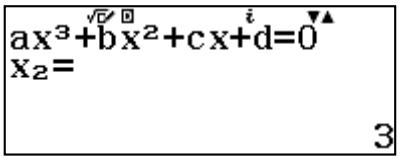
৫. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ ফাংশনটির মান x এর যে মানের জন্য শূন্য তা বের করতে হবে।

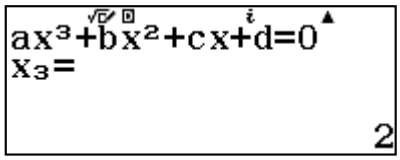
সমাধান- প্রথমে ক্যালকুলেটরে [MENU] বাটন চেপে [(−)] (A) চেপে Equation/Function *mode* এ প্রবেশ করতে হবে। এরপর [2] বাটন চেপে Polynomial equation নির্বাচন করে [3] চাপলে ত্রিঘাত সমীকরণের জন্য নিচের মতো একটি স্ক্রিন প্রদর্শিত হবে। এরপরে ক্রমান্বয়ে সমীকরণের সহগগুলোর মান প্রবেশ করাতে হবে। লক্ষণীয় যে, প্রতিটি মান প্রবেশ করানোর পর [=] বাটন চাপতে হবে।

এরপর ক্রমান্বয়ে [=] চাপতে থাকলে x_1, x_2 ও x_3 এর মান পাওয়া যাবে যা 1,3,2.







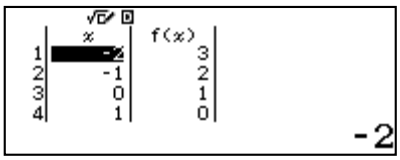


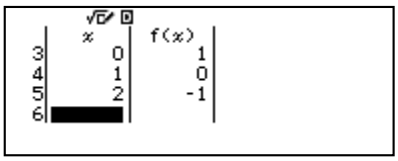
(Key log- [MENU] [(−)] [2] [3] [1] [=] [−] [6] [=] [1] [1] [=] [−] [6] [=] [=] [=] [=])

এই ধরনের সমস্যার সমাধান মানের তালিকা ব্যবহার করেও করা যায়। তবে সেক্ষেত্রে একটি ভালো অনুমানের প্রয়োজন হয়। এই সমস্যার ক্ষেত্রে একটি ভালো অনুমান হতে পারে $-5 \leq x \leq 5$ এবং ব্যবধান 1.

৬. $R = \{(x, y) - x \in A, y \in A$ এবং $x + y = 1\}$ যেখানে $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ অণ্বয়টিকে তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ করে ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় করতে হবে।

সমাধান- প্রথমে Table *mode*-এ গিয়ে $x + y = 1$এর সমতুল্য ফাংশন $F(x) = 1 - x$ প্রবেশ করতে হবে। এরপর $Start, End$ এবং $Step$ এর মান হিসেবে $-2, 2$ ও 1 প্রবেশ করালে নিচের স্ক্রিনের মতো তালিকা পাওয়া যাবে।





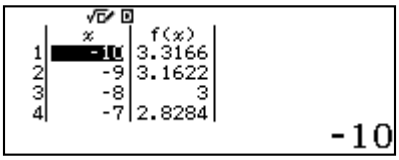
(Key log- MENU 9 1 − x = = − 2 = 2 = 1 = =)

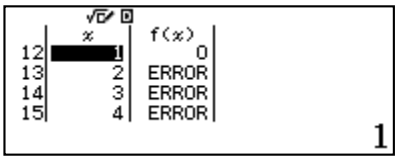
তালিকাটি ভালোভাবে পর্যবেক্ষণ করলে দেখা যাবে যে, x এর মান যখন-2তখন $F(x)$এর মান 3, যা A সেটের অন্তর্ভূক্ত নয়। সুতরাং -2 ডোমেনের অন্তর্ভুক্ত নয়। x কলাম এবং $f(x)$ কলামের সংশ্লিষ্ট মানগুলোকে ক্রমজোড় আকারে লিখলে অণ্বয়টি তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশিত হবে। এক্ষেত্রে যা $\{(-1,2), (0,1), (1,0), (2, -1)\}$।

x কলামের মানগুলো $\{-1,0,1,2\}$ হলো ডোমেন এবং $f(x)$ কলামের মানগুলো $\{2,1,0, -1\}$ হলো রেঞ্জ।

৭. $F(x) = \sqrt{(1 - x)}$ দ্বারা বর্ণিত ফাংশনের ডোমেন কীরূপ হবে?

সমাধান- প্রথমে Table *mode* এ গিয়ে ফাংশনটি প্রবেশ করাতে হবে। এরপর Start, End ও Step মান হিসেবে যথাক্রমে $-10, 10, 1$ প্রবেশ করানো হলো। উল্লেখ্য যে মানগুলো অনুমান নির্ভর। নিচের স্ক্রিনের মানের মতো তালিকা পাওয়া যাবে।



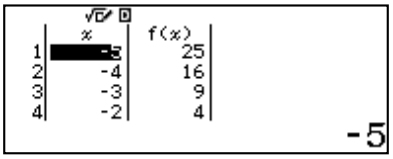


(Key log - MENU 9 √■ 1 − x = = − 1 0 = 1 0 = 1 = =)

মানের তালিকা স্ক্রিনের নিচের দিকে লক্ষ করলে দেখা যাবে, $x > 1$এর জন্য $F(x)$ এর মানগুলো অসংজ্ঞায়িত অর্থাৎ $Error$ প্রদর্শন করছে। সুতরাং বোঝা যাচ্ছে যে, $x > 1$ এর জন্য ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত নয়। তাই ফাংশনটির ডোমেন হবে $x \leq 1$

৮. $F - R \rightarrow R, F(x) = x^2$ ফাংশনটি এক-এক (One-One) কিনা তা নির্ণয় করতে হবে।

সমাধান- প্রথমে Table *mode* এ গিয়ে ফাংশনটি প্রবেশ করিয়ে Start, End ও Step মান হিসেবে -5, 5 ও 1 প্রবেশ করানো হলে ক্যালকুলেটরটি একটি তালিকা প্রদর্শন করবে।

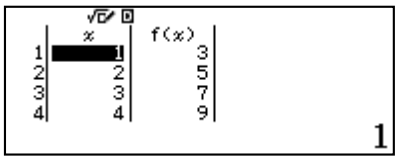


(Key log- MENU 9 x x^2 = = − 5 = 5 = 1 = =)

মানের তালিকা পর্যবেক্ষণ করলে দেখা যাবে যে, $x < 0$ এর জন্য $F(x)$এর মানগুলো $x > 0$ এর জন্য $F(x)$ এর মানগুলোর অনুরূপ। যেমন $F(-1) = 1$এবং $F(1) = 1, F(-2) = 4$ এবং $F(2) = 4$.অর্থাৎ $F(x_1) = F(x_2)$, অতএব ফাংশনটি এক-এক নয়।

৯. $F - \{1,2,3,4\} \rightarrow \boldsymbol{R}$ ফাংশনটি $F(x) = 2x + 1$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত। ফাংশনটি এক-এক ও সার্বিক (অনটু/Onto) কিনা তা নির্ণয় করতে হবে।

সমাধান- প্রথমে Table *mode* এ গিয়ে এবং Step মান হিসেবে $1, 4$ ও 1 প্রবেশ করালে এই ব্যবধির মধ্যে মানের তালিকা প্রদর্শিত হবে, যা নিচের চিত্রে প্রদর্শিত হয়েছে।

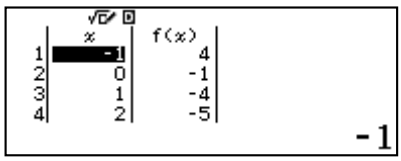


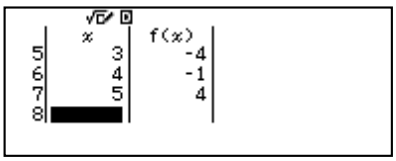
(Key log- MENU 9 2 x + 1 = = 1 = 4 = 1 = =)

মানের তালিকা লক্ষ্য করলে দেখা যাবে x এর প্রত্যেকটি মানের জন্য y এর প্রত্যেকটি মান আলাদা। সুতরাং ফাংশনটি এক-এক। কিন্তু অনটু নয়। কারন এখানে রেঞ্জ R এর সকল মান ডোমেন $\{1,2,3,4\}$ এর প্রতিবিম্ব নয়।

১০. $y = x^2 - 4x - 1$ দ্বিঘাত ফাংশনটির লেখচিত্র আঁকতে হবে।

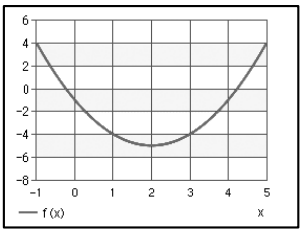
সমাধান- প্রথমে Table *mode* এ গিয়ে ফাংশনটি ক্যালকুলেটরে প্রবেশ করাতে হবে। তারপর Start, End এবং Step মান প্রবেশ করানো হলে নিচের স্ক্রিনের মতো মানের তালিকা প্রদর্শিত হবে। এই মানগুলো থেকে ফাংশনটির লেখচিত্র সম্পর্কে ধারণা পাওয়া যাবে।





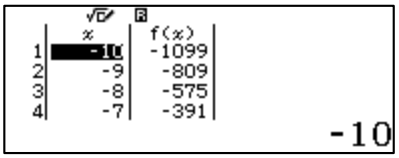
(Key log- MENU 9 x x^2 − 4 x − 1 = = − 1 = 5 = 1 = = SHIFT OPTN)

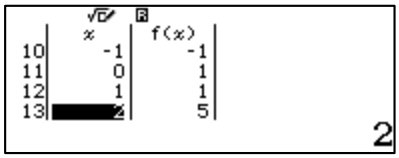
তালিকা লক্ষ্য করলে দেখা যায় যে, $x = 2$ এর জন্য $F(x) = -5$. $x = 2$ এর উভয় পার্শ্বের বিন্দু 1 ও 3 এর জন্য $F(x)$ এর মান একই ও তা -4 . সুতরাং $x = 2$ তে একটি চরম মান রয়েছে। $x = -2$ এর উভয় পাশে x এর অন্যান্য মানের জন্য $F(x)$ এর মান ক্রমান্বয়ে বৃদ্ধি পেয়েছে। সুতরাং $(2, -5)$ বিন্দুটি দ্বিঘাত ফাংশনটির সর্বনিম্ন বিন্দু। QR কোডের মাধ্যমে প্রাপ্ত ফাংশনের লেখচিত্রটি নিচে দেখানো হলো।



১১। $f(x) = x^3 - x^2 + 1$ সমীকরণের লেখচিত্র আঁকতে হবে।

সমাধানঃ পূর্বের উদাহরণের মতো ক্যালকুলেটরে ফাংশনটি প্রবেশ করিয়ে $Start, End$ ও $Step$ মান প্রবেশ করিয়ে [=] চাপলে নিচের স্ক্রিনের মতো মানের তালিকা পাওয়া যাবে।এই মানগুলি থেকে ফাংশনটির লেখচিত্র সম্পর্কে ধারণা পাওয়া যায়।

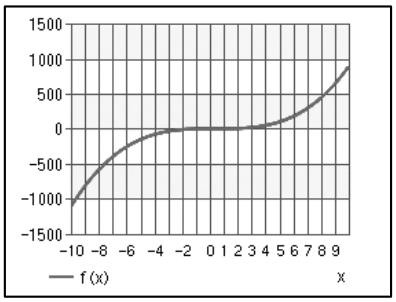




(key log-

[MENU] [9] [x] [SHIFT] [x^2] [−] [x] [x^2] [+] [1] [=] [=] [−] [1] [0] [=] [1] [0] [=] [1] [=] [=] [SHIFT] [OPTN])

QR কোডের মাধ্যমে প্রাপ্ত লেখচিত্রটি নিচে দেখানো হলো -



অনুশীলনী-২

১। $f(x) = x^2 - 4x + 3$ হলে, $f(-1)$ নির্ণয় কর।

২। যদি $g(x) = x^3 + ax^2 - 3x - 6$ হয়, তবে a এর কোনো মানের জন্য $g(-2) = 0$ হবে?

৩। $x = 2x$ ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন কর। যেখানে $-3 \leq x \leq 3$.

৪। $f(x) = x^4 + 5x - 3$ হলে, $f(-1), f(2)$ এবং $f\left(\frac{1}{2}\right)$ এর মান নির্ণয় কর।

৫। যদি $f(y) = y^3 + ky^2 - 4y - 8$ হয়, তবে k এর কোনো মানের জন্য $(-2) = 0$?

৬। $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ হলে, x এর মানের জন্য $f(x) = 0$ হবে?

৭। (ক) x মেমোরিতে 0.3 সংরক্ষণ করে $x = 0.3$ এর জন্য $f(x) = x^3 + 4x + 1$ এর মান বের কর।

(খ) Store command এ $x = 0.4$ বসিয়ে $f(0.4)$ এর মান বের কর।

(গ) $f(0.5)$ এর মান বের কর।

৮। CALC সুবিধা ব্যবহার করে $x = 0.6, 0.7$ ও 0.8 এর জন্য $f(x) = x^3 + 4x + 1$ এর মান বের কর।

৯। $x = 1.1, 1.2$ ও 1.3 এর জন্য $g(x) = 1.2x^2 + 3.1x + 2.7$ এর মান বের কর।

১০। একটি আয়তাকার ঘরের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে A, B ও C এবং ঘরটির বৃহত্তম কৌণিক দূরত্ব $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ দ্বারা প্রকাশিত। CALC সুবিধা ব্যবহার করে ঘরের কৌণিক দূরত্ব বের কর যখন ঘরের মাত্রা $4.2m \times 7.3m \times 2.1m$ এবং যখন মাত্রা $3.2m \times 3.5 \times 2.1m$.

১১। দুইটি সরলরৈখিক ফাংশন $f(x) = 17 - 2x$ এবং $g(x) = 4x - 3$ এর জন্য মানের তালিকা তৈরি কর, যা $x = 1$ থেকে শুরু হয়ে $x = 25$ এ শেষ হবে এবং ব্যবধান হবে 1. এরপর টেবিল ব্যবহার করে,

(ক) $f(0.3)$ এর মান বের কর।

(খ) ফাংশনের সর্বোচ্চ মান ব্যবহার কর।

(গ) x এর কোন মানের জন্য ফাংশনের মান সর্বোচ্চ তা বের কর।

(ঘ) $f(0.8)$ ও $f(0.9)$ এর মধ্যে কোনোটি বড় তা বের কর।

(ঙ) কোন ব্যবধানের মধ্যে ফাংশনটি ক্রমবর্ধমান ও ক্রম-হ্রাসমান তা বের কর।

(চ) x এর কোন মান (গুলোর) জন্য $f(x) = 2.25$ তা বের কর।

১২। মূলদ ফাংশনের জন্য একটি বিচ্ছিন্ন বিন্দু থাকে, যার জন্য ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত নয়। মানের তালিকা থেকে x এর সংশ্লিষ্ট মানগুলো জানা যায়। ফাংশনটি ভালভাবে লক্ষ্য করলে এই বিন্দুগুলো পূর্বেই অনুমান করা যায়। নিচের ফাংশনগুলো কোনো বিন্দুগুলোতে বিচ্ছিন্ন তা অনুমান কর এবং এরপর মানের তালিকা ব্যবহার করে অনুমানটি সঠিক কি না তা যাচাই কর-

(ক) $f(x) = \frac{3}{x}$ (খ) $f(x) = \frac{4}{x-5}$ (গ) $f(x) = \frac{1}{2x+3}$ (ঘ) $f(x) = \frac{2}{3x-4}$

তৃতীয় অধ্যায়

বীজগাণিতিক রাশি

(Expression)

পাটিগণিতের সর্বায়নকৃত রূপই হলো বীজগণিত। কতগুলো প্রক্রিয়াচিহ্ন যেমন $+, -, \times, \div$ এর সাহায্যে এক বা একাধিক সংখ্যা নির্দেশক প্রতীককে অর্থবোধকভাবে সাজালে তাকে বীজগাণিতিক রাশি বলে। যেমন যে কোনো সংখ্যা $1, 5, 9$ ইত্যাদির পরিবর্তে x, y ব্যবহার করা যায়। বীজগাণিতিক রাশিতে যে সংখ্যাগুলো ব্যবহার করা হয় তাদের মান নির্দিষ্ট, এদের ধ্রুবক বলে। অন্যদিকে যে প্রতীকগুলো ব্যবহার করা হয় তাদেরকে চলক বলে। চলকের মান নির্দিষ্ট নয় এবং এদের মান পরিবর্তিত হয়। বীজগাণিতিক সূত্র, উৎপাদকের মাধ্যমে বীজগাণিতিক রাশির উপস্থাপন ও বিশ্লেষণ এবং এগুলোর মাধ্যমে সমস্যার সমাধানই হলো বীজগণিতের ভিত্তি। এই অধ্যায়ে ClassWiz ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে নিম্নোক্ত বিষয়গুলো সম্পর্কে আলোচনা করা হবে-

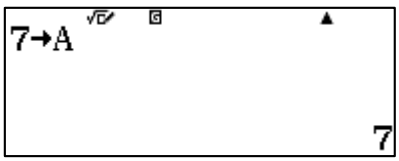
- বীজগাণিতিক রাশির মান নির্ণয়
- Solve ব্যবহার করে মান নির্ণয়
- উৎপাদক বিশ্লেষণ
- Store ফাংশন ব্যবহার করে ভাগশেষ নির্ণয় এবং
- শূন্যায়ন পদ্ধতিতে উৎপাদকে বিশ্লেষণ

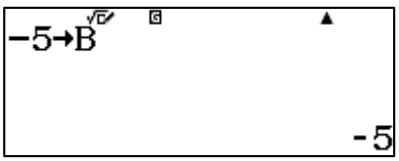
এজন্য এই অধ্যায়ে Calulate *mode*, Equation *mode* এবং Solve ও Fact ফাংশন ব্যবহার করা হবে।

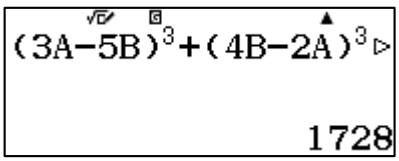
৩.১ বীজগাণিতিক রাশির মান নির্ণয়

ধরা যাক, একটি রাশি $(3x-5y)^3+(4y-2x)^3+3(x-y)(3x-5y)(4y-2x)$। রাশিটিতে সহগগুলো যেমন $3, -5, 4, -2$ ... ...এগুলো হলো ধ্রুবক। পক্ষান্তরে x ও y হলো চলক। অর্থাৎ, x ও y এর মান পরিবর্তিত হতে পারে। x ও y এর বিভিন্ন মানের জন্য রাশিটির মান বিভিন্ন হয়।

ধরা যাক, $x=7$ ও $y=-5$ মান দুইটি যথাক্রমে A ও B মেমোরিতে STO (−) (A) ও STO °''' (B) চেপে সংরক্ষণ করা হলো। এরপর ALPHA ব্যবহার করে রাশিটিকে ক্যালকুলেটরে প্রবেশ করিয়ে = বাটন চাপলে নিচের স্ক্রিনের মতো ফলাফল প্রদর্শিত হবে।



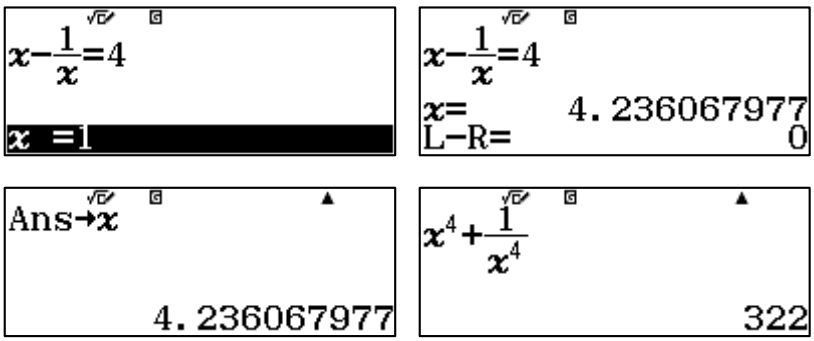




৩.২ Solve ব্যবহার করে মান নির্ণয়

একটি এক চলক বিশিষ্ট রাশির মান দেওয়া থাকলে সেটি ব্যবহার করে উক্ত চলকবিশিষ্ট অন্য একটি রাশির মান Solve ফাংশন ব্যবহার করে সহজেই বের করা যায়। সেজন্য [ALPHA] [CALC] (=) ও [SHIFT] [CALC] (Solve) ব্যবহার করে উক্ত চলকের মান বের করতে হয়। এরপর মেমোরিতে এই মান সংরক্ষণ করে অন্য রাশিটি ক্যালকুলেটর প্রবেশ করিয়ে [=] বাটন চাপলে রাশিটির মান পাওয়া যাবে। উল্লেখ্য যে, রাশিগুলোর চলক হিসেবে ক্যালকুলেটরে x ব্যবহার করাই শ্রেয়। কারণ x এর জন্য ClassWiz এ আলাদা কী রয়েছে।

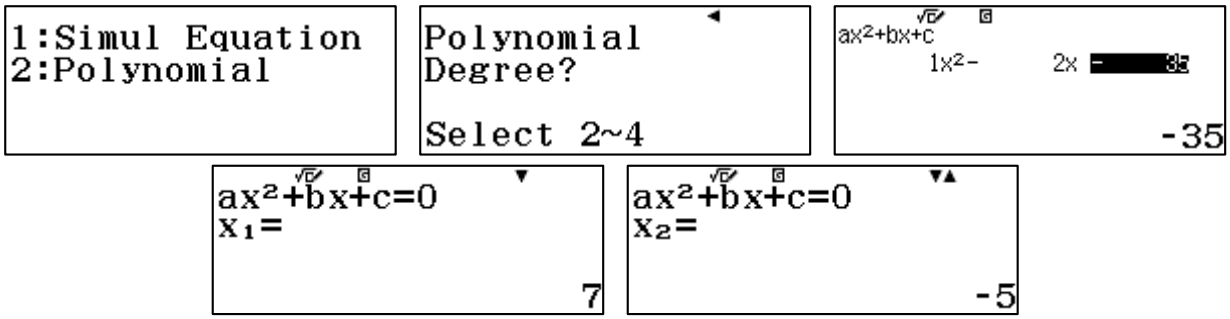
উদাহরণস্বরূপ, ধরা যাক একটি রাশি $x - \frac{1}{x} = 4$ এর জন্য $x^4 + \frac{1}{x^4}$ এর মান বের করতে হবে। সেজন্য প্রথমে $x - \frac{1}{x} = 4$ রাশিটি ক্যালকুলেটরে প্রবেশ করাতে হবে। এরপর [SHIFT] [CALC] চাপলে নিচের স্ক্রিনের মতো ক্যালকুলেটরটি x এর জন্য একটি প্রাথমিক অনুমান চাইবে। এখানে 1 প্রবেশ করিয়ে [=] চাপলে দ্বিতীয় স্ক্রিনের মতো x এর মান প্রদর্শিত হবে। এরপর [Ans] বাটন চাপার পর [STO] ও [x] চাপলে ফলাফলটি x মেমোরিতে সংরক্ষিত হবে। এখন দ্বিতীয় রাশিটিকে প্রবেশ করিয়ে [=] চাপলে ক্যালকুলেটর ফলাফল প্রদর্শন করবে। এক্ষেত্রে ফলাফল 322.



৩.৩ উৎপাদকে বিশ্লেষণ

বীজগাণিতিক রাশির উৎপাদকগুলো এক বা একাধিক পদ বিশিষ্ট হয়ে থাকে। কোনো বীজগাণিতিক রাশিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করার জন্য উক্ত রাশিকে দুই বা ততোধিক রাশির গুণফল রূপে প্রকাশ করতে হয়। যদিও এটি ClassWiz এ সরাসরি করা যায় না, কিন্তু একটি বিশেষ কৌশল অবলম্বন করে উৎপাদক বের করা যায়। সেজন্য [MENU] [(−)] (A) চেপে Equation/Function *mode* থেকে [2] চেপে Polynomial নির্বাচন করতে হয়। এরপর রাশিটির সর্বোচ্চ ঘাত অনুযায়ী 2, 3 অথবা 4 নির্বাচন করতে হয়। প্রাপ্ত সমাধান অর্থাৎ x এর যে মানগুলো পাওয়া যাবে সেই মানগুলো প্রত্যেককে x থেকে বিয়োগ করে গুণ আকারে লিখতে হবে।

$x^2 - 2x - 35$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করার জন্য উপরের বর্ণনার মতো করে ঘাত 2 নির্বাচন করতে হবে। এরপর রাশিটির সহগগুলো $1, -5$ ও 6 ক্যালকুলেটরে প্রবেশ করিয়ে [=] চাপতে থাকলে x_1 ও x_2 এর মান পাওয়া যাবে।



উপরের স্ক্রিনে দেখা যাচ্ছে যে, $x_1 = 7$ ও $x_2 = -5$

সুতরাং উপরের রাশির উৎপাদকে বিশ্লেষিত রূপ হবে $(x-7)(x+5)$.

অর্থাৎ $x^2 - 2x - 35 = (x-7)(x+5)$.

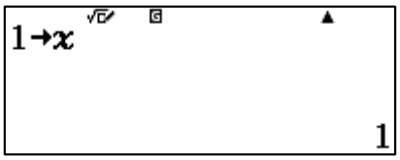
দ্রষ্টব্য: যদি x এর মান ভগ্নাংশ আকারে আসে তাহলে হরকে x এর সাথে গুণ করে তা থেকে লব বিয়োগ আকারে লিখতে হবে। যেমন- $x_1 = 7$ না হয়ে যদি $x_1 = \frac{7}{2}$ হতো তাহলে উৎপাদকে বিশ্লেষিত রূপ হতো $(2x-7)(x+5)$.

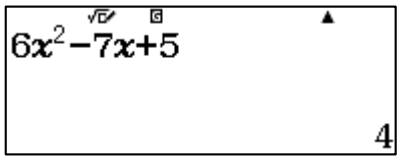
৩.৪ ভাগশেষ বের করতে store ফাংশনের ব্যবহার-

ভাগশেষ উপপাদ্য অনুযায়ী $f(x)$ কে $(x-a)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হয় $f(a)$. ClassWiz এর মাধ্যমে ভাগশেষের মান বের করার জন্য প্রথমে a এর মান ক্যালকুলেটরের মেমোরিতে সংরক্ষণ করতে হয়। এরপর রাশিটিকে প্রবেশ করিয়ে [=] বাটন চাপলে ক্যালকুলেটর যে ফলাফল প্রদর্শন করবে তা ভাগশেষের মান।

উদাহরণস্বরূপ, $6x^2 - 7x + 5$ কে $(x-1)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ কত থাকে তা বের করার জন্য প্রথমে [STO] কী ব্যবহার করে 1 কে x মেমোরিতে সংরক্ষণ করতে হবে।

তারপর $6x^2 - 7x + 5$ ক্যালকুলেটরে প্রবেশ করিয়ে [=] বাটন চাপলে ভাগশেষের মান নিচের স্ক্রিনের মতো প্রদর্শিত হবে। এক্ষেত্রে ভাগশেষ হলো 4.

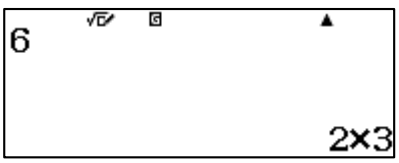




৩.৫ শূন্যায়ন পদ্ধতিতে (Vanishing method) উৎপাদকে বিশ্লেষণ

শূন্যায়ন পদ্ধতিতে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করার জন্য রাশিটিতে যে ধ্রুবক মানটি থাকে প্রথমে সেটির উৎপাদকগুলো বের করে নিতে হয়। এরপর উৎপাদকগুলোর ধনাত্মক ও ঋণাত্মক উভয় মানের জন্য রাশিটির মান কেমন আসে তা নিরীক্ষা করে দেখতে হয়। যে মানের জন্য রাশিটির মান শূন্য হবে তা x এর সাথে বিয়োগ আকারে লিখলে যা পাওয়া যাবে সেটি হবে উক্ত রাশিটির একটি উৎপাদক।

ClassWiz এর মাধ্যমে খুব সহজেই কোনো সংখ্যার মৌলিক উৎপাদক (Factor) বের করা যায়। এ জন্য FACT ([SHIFT] [°''']) নির্দেশনা ব্যবহার করতে হয়। উদহারণস্বরূপ, 6 এর মৌলিক উৎপাদকগুলো ক্যালকুলেটর প্রদর্শন করবে।



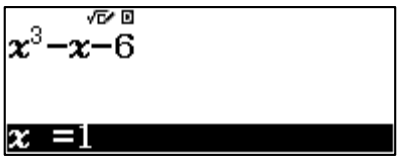
উপরের স্ক্রিনে দেখা যাচ্ছে যে, 6 এর মৌলিক উৎপাদক গুলো হলো 2 ও 3 ।

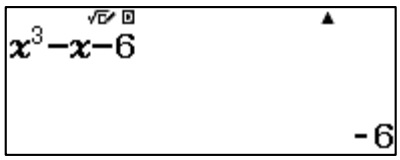
আবার ধরা যাক, 12 এর উৎপাদক বের করার ক্ষেত্রে ক্যালকুলেটর ফলাফল প্রদর্শন করবে $2^2 \times 3$। অর্থাৎ 12 এর মৌলিক উৎপাদক হলো 2 ও 3। আবার 16 এর মৌলিক উৎপাদক হবে শুধুমাত্র 2।

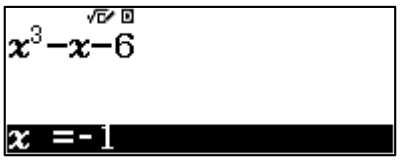
লক্ষণীয় যে ক্যালকুলেটর শুধুমাত্র মৌলিক উৎপাদকগুলোই প্রদর্শন করে। এই সকল মৌলিক উৎপাদক থেকে সহজেই সংখ্যাটির অন্যান্য সকল উৎপাদক বের করা সম্ভব।

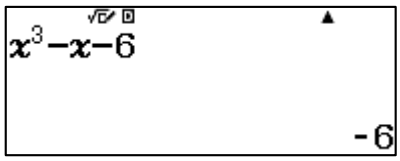
6 এর মৌলিক উৎপাদক পেয়েছি 2×3। সুতরাং 6 এর উৎপাদকগুলো হবে $1,2,3$ ও $2 \times 3 = 6$ । অনুরূপভাবে 12 এর উৎপাদকগুলো হবে $1, 2, 3, 2^2 = 4, 2 \times 3 = 6$ ও 12। আবার 16 এর ক্যালকুলেটরে প্রদর্শিত মৌলিক উৎপাদক 2^4। সুতরাং 16 এর উৎপাদকগুলো হবে $1, 2, 2^2 = 4, 2^3 = 8$ এবং $2^4 = 16$।

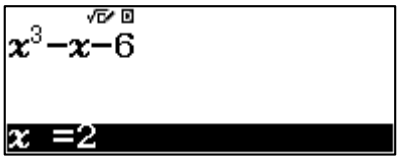
$x^3 - x - 6$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করার জন্য প্রথমে ধ্রুব সংখ্যা 6 এর উৎপাদকগুলো বের করতে হবে। উপরের আলোচনা অনুযায়ী 6 এর উৎপাদকগুলো হলো $1, 2, 3$ ও 6. এগুলোর ধনাত্মক ও ঋণাত্মক উভয় মান রাশিতে বসিয়ে দেখতে হবে যে কোনটির জন্য রাশিটির মান শূন্য হয়। ClassWiz এর মাধ্যমে এটি সহজে করার জন্য রাশিটি ক্যালকুলেটরে প্রবেশ করিয়ে [CALC] চাপলে x এর মান চাইবে। এরপর একটি করে মান দিয়ে পর্যবেক্ষণ করতে হয়। প্রতিটি মান বসানোর পর [=] বাটন চাপতে হবে। এগুলো নিচে দেখানো হলো-

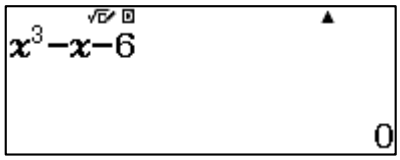


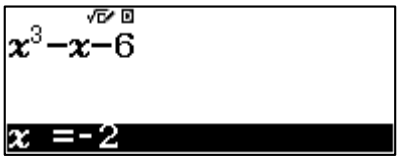


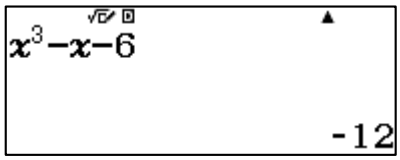


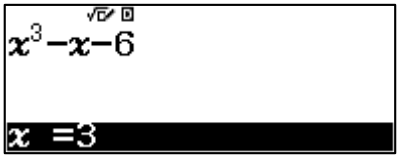


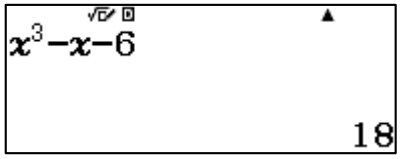


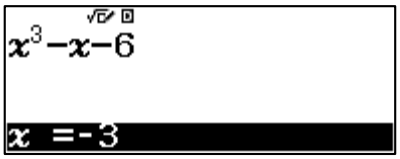


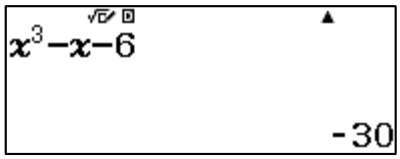


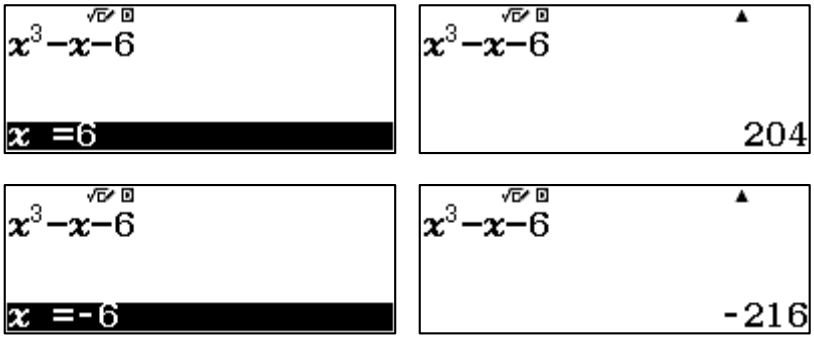












উপরের স্ক্রিনগুলো হতে দেখা যাচ্ছে যে $x = 2$ এর জন্য রাশিটির মান শূন্য। সুতরাং $(x - 2)$ রাশিটির একটি উৎপাদক।

দ্রষ্টব্য: যদি ধ্রুব সংখ্যাটির উৎপাদকসমূহের ধনাত্মক ও ঋণাত্মক কোনো মানের জন্যই রাশিটির মান শূন্য না হয়, তাহলে প্রথমে দেখতে হবে যে রাশিটিতে বিদ্যমান সর্বোচ্চ ঘাতযুক্ত চলকের সহগ আছে কিনা, যদি থাকে তাহলে ধ্রুব সংখ্যাটিকে ঐ সহগ দ্বারা ভাগ করতে হবে। এরপর ভাগফলের উৎপাদকসমূহের ধনাত্মক ও ঋনাত্মক মানের জন্য পুনরায় পরীক্ষা করতে হবে যে, কোনো মানের জন্য শূন্য আসে কিনা। যে মানের জন্য শূন্য হবে তা x এর সাথে বিয়োগ আকারে লিখলে যা পাওয়া যাবে সেটি হবে উক্ত রাশিটির একটি উৎপাদক। যদি ধ্রুব সংখ্যাটিকে ভাগ করলে ভগ্নাংশ আসে তাহলে সেক্ষেত্রে উৎপাদক বের না করে শুধু ঐ মানটি দিয়েই পরীক্ষা করতে হবে।

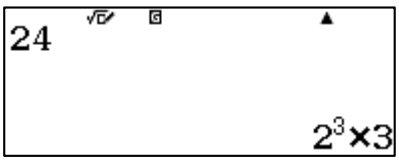
যেমন $4x^3 - 5x^2 + 5x - 1$ রাশিটিতে ধ্রুব সংখ্যা হলো 1। 1 এর উৎপাদক 1। সুতরাং 1 এর ধনাত্মক ও ঋণাত্মক মান অর্থাৎ 1 এবং -1 এর জন্য রাশিটির মান পাওয়া যায় যথাক্রমে 3 ও -15। কিন্তু ধ্রুব সংখ্যা 1 কে রাশিটির সর্বোচ্চ ঘাতযুক্ত চলক x^3 এর সহগ 4 দ্বারা ভাগ করলে ভাগফল হয় $\frac{1}{4}$। $\frac{1}{4}$ এর জন্য রাশিটির মান হয় 0। সুতরাং $x - \frac{1}{4}$ বা $4x - 1$ হলো রাশিটির একটি উৎপাদক।

যদি এভাবেও রাশিটির মান শূন্য না হয় তাহলে শূন্যায়ন পদ্ধতিতে উৎপাদক বের করা সম্ভব হবে না।

উদাহরণমালা

১। 24 এর উৎপাদকগুলো বের করতে হবে।

সমাধান- ক্যালকুলেটরকে Calulate *mode* এ নিয়ে 24 কে প্রবেশ করিয়ে [=] বাটন চাপতে হবে। এরপর [SHIFT] [°'''] (FACT) চাপলে স্ক্রিনের মতো ফলাফল প্রদর্শিত হবে।

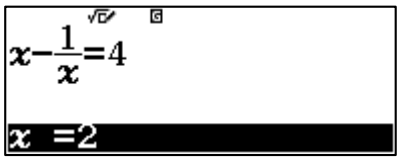


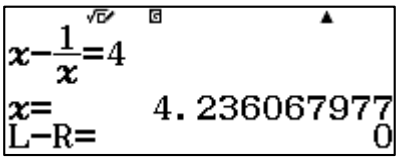
(Key log- [2] [4] [=] [SHIFT] [°'''])

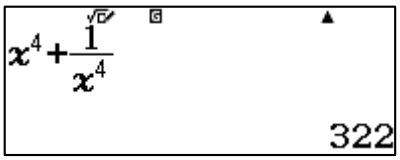
ক্যালকুলেটরে 24 এর শুধুমাত্র মৌলিক উৎপাদকগুলো প্রদর্শন করে। যেহেতু $2^3 \times 3$ আকারে আছে তাই বাকি উৎপাদকগুলো হবে $2^2 = 4, 2^3 = 8, 2 \times 3 = 6, 2^2 \times 3 = 12, 2^3 \times 3 = 24$ ও 1

২। $x - \frac{1}{x} = 4$ হলে $x^4 + \frac{1}{x^4}$ এর মান বের করতে হবে।

সমাধান- প্রথমে ক্যালকুলেটরকে Calulate *mode* এ নিয়ে $x - \frac{1}{x} = 4$ সমীকরণটি প্রবেশ করাতে হবে। = চিহ্নের জন্য [ALPHA] [CALC] ([=] বাটন চাপা যাবে না) চাপতে হবে। এরপর [SHIFT] [CALC] (Solve) চাপলে ক্যালকুলেটর x এর একটি অনুমিত মান চাইবে। অনুমিত মান হিসেবে 2 প্রবেশ করিয়ে [=] বাটন চাপলে দ্বিতীয় স্ক্রিনের মতো x এর মান বের হবে। এরপর $x^4 + \frac{1}{x^4}$ রাশিটি ক্যালকুলেটরে টাইপ করে [=] চাপলে তৃতীয় স্ক্রিনের মতো ফলাফল প্রদর্শিত হবে।



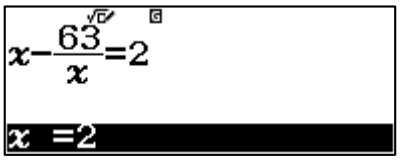


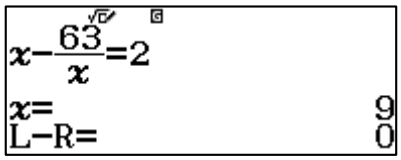


(Key log- [x] [−] [1] [▭/▭] [x] [▶] [ALPHA] [CALC] [4] [SHIFT] [CALC] [2] [=] [=] [x] [x■] [4] [▶] [+] [1] [▭/▭] [x] [x■] [4] [=])

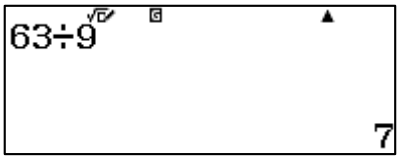
৩। $x - y = 2$ ও $xy = 63$ হলে $x^2 + y^2$ এর মান বের করতে হবে।

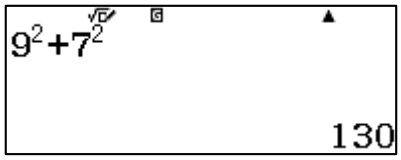
সমাধান- প্রথমে $xy = 63$ হতে $y = \frac{63}{x}$ বের করতে হবে। এরপর প্রথম সমীকরণ $x - y = 2$ তে y এর মান বসিয়ে ক্যালকুলেটরে নিচের প্রথম স্ক্রিনের মতো প্রবেশ করিয়ে [=] বাটন চাপলে ক্যালকুলেটরটি x এর একটি অনুমিত মান চাইবে। অনুমিত মান হিসেবে 2 প্রবেশ করিয়ে [=] বাটন চাপলে নিচের দ্বিতীয় স্ক্রিনের মতো x এর মান বের হবে।





$y = \frac{63}{x}$ এ x এর প্রাপ্ত মান বসিয়ে y এর মান বের করা যায়। এরপর $x = 9$ ও $y = 7$ বসিয়ে $x^2 + y^2$ এর মান বের করতে হবে।

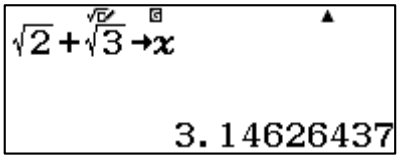


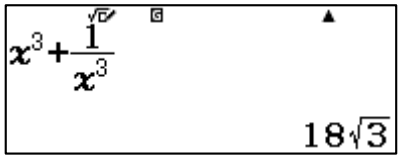


(Key log- [x] [−] [6] [3] [▭/▭] [x] [▶] [ALPHA] [CALC] [2] [SHIFT] [CALC] [2] [=] [=] [6] [3] [÷] [9] [=] [9] [x²] [+] [7] [x²] [=])

৪। $a = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ হলে $a^3 + \frac{1}{a^3}$ এর মান বের করতে হবে।

সমাধান- প্রথমে ক্যালকুলেটরকে Calulate *mode* এ নিয়ে [STO] চেপে x এর মান হিসেবে $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ সংরক্ষণ করতে হবে। এরপর $a^3 + \frac{1}{a^3}$ এর অনুরূপ রাশি $x^3 + \frac{1}{x^3}$ ক্যালকুলেটরে প্রবেশ করিয়ে [=] চাপলে ফলাফল প্রদর্শিত হবে।

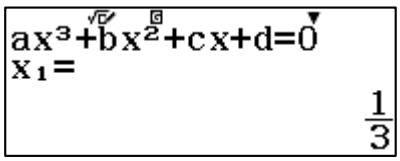


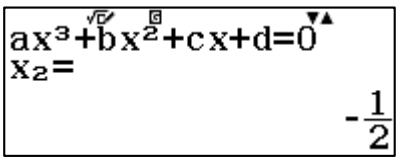


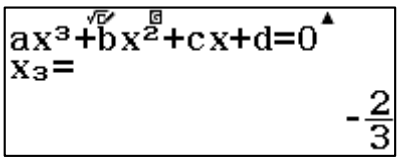
(Key log- [√■] [2] [▶] [+] [√■] [3] [STO] [x] [x] [SHIFT] [x²] [+] [1] [▭] [x] [SHIFT] [x²] [=])

৫। $18x^3 + 15x^2 - x - 2$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করতে হবে।

সমাধান- ক্যালকুলেটরে Equation/ Function *mode* এ নিয়ে 2 ঘাত বিশিষ্ট Polynomial equation নির্বাচন করতে হবে। এরপর সহগগুলো প্রবেশ করিয়ে [=] বাটন চাপলে ফলাফল প্রদর্শিত হবে।







(Key log- [MENU] [(−)] [2] [3] [1] [8] [=] [1] [5] [=] [−] [1] [=] [−] [2] [=] [=] [S⇔D] [=] [S⇔D] [=] [S⇔D])

সুতরাং রাশিটির উৎপাদকে বিশ্লেষিত রূপ হবে $(3x - 1)(2x + 1)(3x + 2)$.

অর্থাৎ, $18x^3 + 15x^2 - x - 2 = (3x - 1)(2x + 1)(3x + 2)$

অনুশীলনী -৩

১। $2x + \frac{2}{x} = 3$ হলে, $x^2 + \frac{1}{x^2}$ এর মান কত?

২। $x = 3, y = 4$ এবং $z = 5$ হলে, $9x^2 + 16y^2 + 4z^2 - 24xy - 16yz + 12zx$ এর মান নির্ণয় কর।

৩। যদি $a = 15$ হয়, তবে $8a^3 + 60a^2 + 150a + 130$ এর মান কত?

৪। $a = 7$ এবং $b = -5$ হলে, $(3a - 5b)^3 + (4b - 2a)^3 + 3(a - b)(3a - 5b)(4b - 2a)$ এর মান কত?

৫। $a = \sqrt{6} + \sqrt{5}$ হলে, $\frac{a^6 - 1}{a^3}$ এর মান নির্ণয় কর।

৬. শূন্যায়ণ পদ্ধতিতে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর-

(i) $9x^2 + 24x + 16$
(ii) $x^2 + 13x + 36$
(iii) $x^4 + x^2 - 20$
(iv) $a^2 - 30a + 216$
(v) $4x^4 - 25x^2 + 36$

৭. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর-

(i) $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$
(ii) $6x^2 - 7x + 1$
(iii) $3x^2 - 7x - 6$
(iv) $a^4 - 4a + 3$
(v) $4x^4 + 12x^3 + 7x^2 - 3x - 2$
(vi) $12x^2 - 38x + 20$

৮। শতকরা বার্ষিক 7 টাকা হার মুনাফায় 650 টাকার 6 বছরের মুনাফা কত?

৯। বার্ষিক শতকরা 6 টাকা হার চক্রবৃদ্ধি মুনাফায় 15000 টাকার 3 বছরের সবৃদ্ধিমূল ও চক্রবৃদ্ধি মুনাফা নির্ণয় কর।

চতুর্থ অধ্যায়

এক চলক বিশিষ্ট সমীকরণ

(One Variable Equation)

বীজগণিতের একটি অন্যতম গুরুত্বপূর্ণ শাখা হলো 'সমীকরণ'। ClassWiz এ সমীকরণ সমাধানের জন্য বিভিন্ন রকম পদ্ধতি রয়েছে। উক্ত ক্যালকুলেটরের মাধ্যমে সমীকরণের সঠিক সমাধান পাওয়া যায়, এবং সমীকরণের সঠিক সংখ্যাতাত্ত্বিক বিশ্লেষণ সম্ভব হয়। এই অধ্যায়ে ClassWiz ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে নিম্নোক্ত বিষয়গুলো সম্পর্কে আলোচনা করা হবে-

- Table *mode* ব্যবহার করে সমীকরণের সমাধান
- Solve ফাংশন ব্যবহার করে সমীকরণের সমাধান
- দুটি Table ব্যবহার করে সমীকরণের সমাধান
- Equation *mode* ব্যবহার করে দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান
- ত্রিঘাত সমীকরণের সমাধান এবং
- চতুর্ঘাত ও পঞ্চঘাত বিশিষ্ট সমীকরণের সমাধান নির্ণয়ের পদ্ধতি

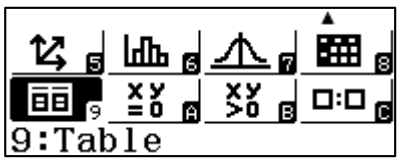
সেজন্য SETUP (SHIFT MENU) ব্যবহার করে ক্যালকুলেটরটিকে MathI/MathO *mode*-এ এবং Norm 2 তে রাখতে হবে।

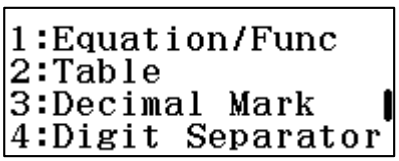
৪.১ Table *mode* ব্যবহার করে সমীকরণের সমাধান

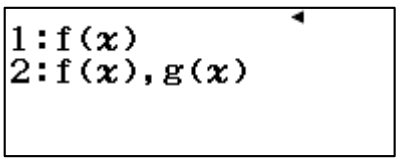
এক চলক বিশিষ্ট সমীকরণ সমাধান করার জন্য চলকটির যে মানের জন্য (যদি কোনো মান থেকে থাকে) সমীকরণটি সত্য হয় তা খুঁজে বের করতে হয়। মানের তালিকা ব্যবহার করে সমীকরণের সমাধান করার জন্য কতগুলো উপায় রয়েছে।

উদাহরণস্বরূপ ধরা যাক, একটি সমীকরণ $x^3 = 3x^2 - 1$। উক্ত সমীকরণের সমাধানগুলো এবং সমীকরণ $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$ এর সমাধানগুলো একই। ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে এই ফাংশনের মানের তালিকা তৈরি করা যায় এবং x এর যে মানের জন্য (যদি কোনো মান থাকে) ফাংশনটির মান শূন্য হয় তা খুঁজে বের করা সম্ভব।

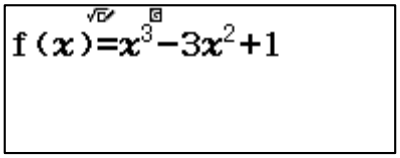
প্রথমে MENU 9 ব্যবহার করে Table *mode*-এ প্রবেশ করতে হবে। ClassWiz এ একটি অথবা দুইটি ফাংশনের মানের তালিকা তৈরি করা সম্ভব। যখন একটি ফাংশন ব্যবহার করা প্রয়োজন হয়, তখন SETUP এ গিয়ে (নিচের চিত্রের মতো) একটি ফাংশন নির্বাচন করে তালিকা তৈরি করা যায় অথবা সহজভাবে $g\ (x)$ এর কোনো ইনপুট না দিয়েও একটি ফাংশনের তালিকা করা যায়।

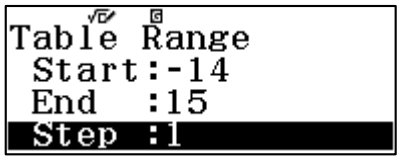






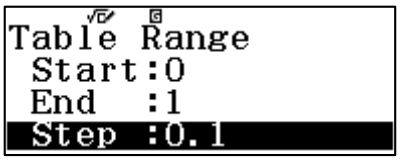
নিচের চিত্রের মতো করে, $f(x)$ এ $x^3 - 3x^2 + 1$ ফাংশনটি প্রবেশ করানো হলো। (লক্ষণীয় যে, SHIFT x^2 ব্যবহার করে সরাসরি x^3 প্রবেশ করানো যায়) ফাংশনটির জন্য যথোপযুক্ত ব্যবধি নিয়ে মানের তালিকা তৈরি করতে হবে,যা = বাটন চাপার মাধ্যমে শুরু করতে হবে। এক্ষেত্রে সমাধান সম্পর্কে কোনো ধারণা না থাকায় একটি বিস্তৃত ব্যবধি ব্যবহার করাই শ্রেয়। যেহেতু ক্যালকুলেটরটি শুধুমাত্র 30 টি মান দেখাতে সক্ষম, তাই নিচের স্ক্রিনের মতো x এর মান -14 থেকে 15 পর্যন্ত এবং ব্যবধি 1 নিয়ে দেখানো হলো। $Start, End$ এবং $Step$ মান বসানোর পর = বাটন চাপতে হবে।

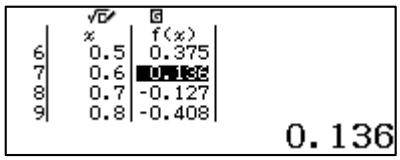




$f(x)$ কলামের কোনো মানটি শূন্য অথবা শূন্যের কাছাকাছি তা খুঁজে বের করার জন্য কার্সর এর ▲ ও ▼ বাটন ব্যবহার করতে হবে। $f(x)$ এর মান কোথায় ধনাত্মক থেকে ঋণাত্মকে পরিবর্তিত হয় তা খেয়াল রাখতে হবে। কেননা শূন্য মানটি এর ভিতরে থাকে।

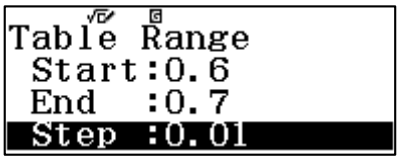
এক্ষেত্রে দেখা যায় যে, মানের তালিকায় এমন কোনো মান নেই যার জন্য $f(x) = 0$. কিন্তু $-1 < x < 0$, $0 < x < 1$ এবং $2 < x < 3$ এর ভিতরে চিহ্নের পরিবর্তন হয়েছে, যা থেকে বোঝা যায় যে এই তিনটি ব্যবধির মাঝে ফাংশনের মূলগুলো বিদ্যমান। এখানে শুধুমাত্র একটি ব্যবধি $0 < x < 1$ পর্যবেক্ষণ করা হলো।
AC বাটন চেপে ফাংশনে যাওয়ার পর আরো ভালোভাবে পর্যবেক্ষণের জন্য Start, End ও Step মান হিসেবে 0,1 এবং 0.1 ব্যবহার করা হলো।

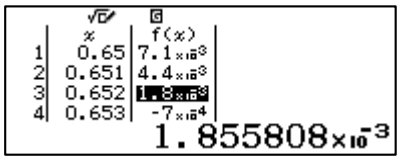


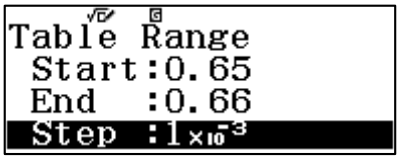


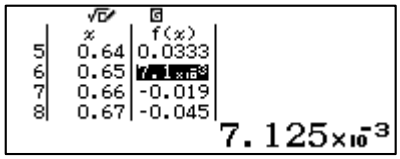
এই টেবিলটি ভালোমতো লক্ষ্য করলে দেখা যাবে, যখন $x = 0.6$ তখন ফাংশনটির একটি ধনাত্মক মান রয়েছে। যখন $x = 0.7$, তখন ফাংশনের মান ঋণাত্মক। তাই এই দুই মানের ভিতরে কোথাও x এর মান শূন্য হবে।

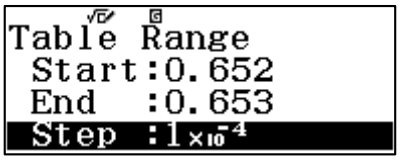
$0.6 \leq x \leq 0.7$ এবং আরো ছোট ব্যবধান 0.01 ব্যবহার করে মানের তালিকা তৈরীর পদ্ধতির পুনরাবৃত্তি করতে হবে। নিচের চিত্রে ক্যালকুলেটরের দ্বিতীয় স্ক্রিনটি ফলাফল প্রদর্শন করছে।

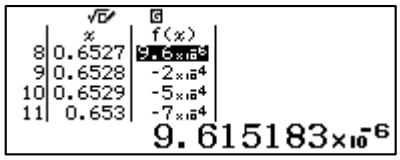








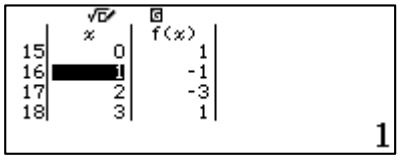


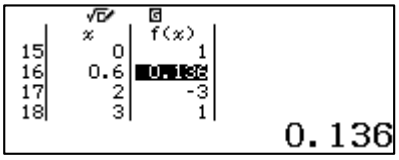


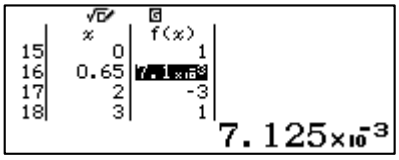
উপরের চতুর্থ ও ষষ্ঠ স্ক্রিনের মতো যথাক্রমে [0.65,0.66] ও [0.652,0.653] ব্যবধির জন্য এই পদ্ধতির পুনারাবৃত্তি হলে ব্যবধান ছোট হতে থাকবে। যেহেতু প্রত্যেকবার ধাপগুলো দশের গুণিতক হিসাবে হ্রাস পায়, তাই ফলাফলটি সঠিক মূলের কাছাকাছি হবে। তৃতীয় স্ক্রিনে দেখায় যে, $x = 0.6527$ ও $x = 0.6528$ এর মাঝে ফাংশনের মান শূন্য।

এই তালিকাগুলো দেখায় যে $x \approx 0.653$ সমীকরনের সমাধানের কাছাকাছি। এই পদ্ধতি চালিয়ে গেলে সমাধানের আরো কাছাকাছি পৌঁছানো সম্ভব। কিন্তু যেহেতু সংখ্যাগুলো অমূলদ তাই কখনোই পুরোপুরি সঠিক মান পাওয়া যাবে না।

$Table\ mode$ ব্যবহার করে আরেকটি পদ্ধতিতে কাছাকাছি সমাধান পাওয়া যায়। সেজন্য বার বার ব্যবধির মান পরিবর্তন না করে সরাসরি কীবোর্ড ব্যবহার করে x কলামে সমাধানের সম্ভাব্য মানগুলো প্রবেশ করাতে হয়। [=] বাটন চাপলে প্রত্যেকবার $f(x)$ এর মান পাওয়া যায়। উদাহরণস্বরূপ, $x = 0.6$ ও $x = 0.65$ নিচের দুইটি স্ক্রিনে দেখানো হলো।

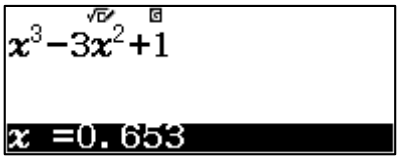


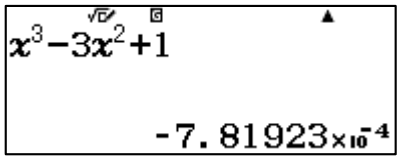




$f(x)$ এর মান শূন্যের কাছাকাছি না যাওয়া পর্যন্ত x এর মান ক্রমাগত পরিবর্তন করতে হবে।

$x = 0.653$ এর জন্য $x^3 - 3x^2 + 1$ এর মান শূন্যের কতটা কাছাকাছি তা জানার মাধ্যমে প্রাপ্ত মানটি সঠিক সমাধানের কতটা কাছাকাছি তা জানা যায়। এটি করার জন্য একটি ভালো পদ্ধতি হচ্ছে Calc ফাংশনের ব্যবহার। এজন্য Calulate *mode* এ গিয়ে রাশিটি নিচের স্ক্রিনের মতো টাইপ করে [CALC] বাটন চেপে $x = 0.653$ প্রবেশ করাতে হবে। এরপর [=] বাটন চাপলে মানটি প্রদর্শিত হবে।



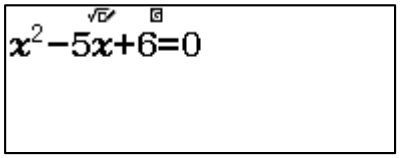


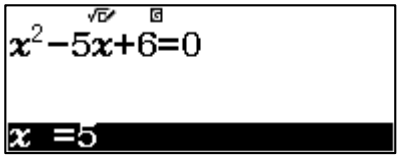
$x = 0.653$, এর জন্য রাশিটির মান -0.000781923 যা 0 এর খুব কাছাকাছি। তাই এই মানটি সমীকরনের সমাধানের খুব নিকটবর্তী। এরপর, [=] বাটন চেপে অন্য মানের জন্য ও একই পদ্ধতিতে পরীক্ষা করা যায়। $x = 0.6527$ এর জন্য মানটি সমাধানের আরো নিকটবর্তী হবে। ([AC] বাটন চাপলে রাশিটি ডিলিট হয়ে যাবে।)

দ্রষ্টব্য- এই সমীকরণের আরো দুইটি সমাধান আছে যা একই পদ্ধতি অবলম্বন করে বের করা যাবে।

৪.২ Solver ব্যবহার করে সমাধান

এক চলক সম্বলিত (সাধারণত x) সমীকরণের সমাধান নির্ণয়ের জন্য ক্যালকুলেটরে SOLVE বাটন ব্যবহার করা হয়। ধরা যাক, একটি সমীকরণ $x^2 - 5x + 6 = 0$ ক্যালকুলেটরে Calulate *mode* ব্যবহার করে নিচের চিত্রের মতো সমীকরণটি টাইপ করতে হবে। এক্ষেত্রে = চিহ্নের জন্য প্রবেশ করানোর জন্য [ALPHA] [CALC] (সাধারণ [=] বাটন ব্যবহার করা যাবে না) ব্যবহার করতে হবে। সমীকরণ প্রবেশ করানো পরে [=] বাটন চাপা যাবে না।

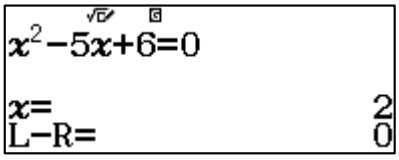


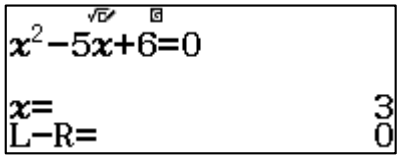


এই সমীকরণটি সমাধান করার পদ্ধতি শুরু করার জন্য [SHIFT] [CALC] বাটন ব্যবহার করে Solve command দিতে হবে। ক্যালকুলেটরে উপরের ২য় স্ক্রিনের মতো x এর জন্য একটি প্রাথমিক অনুমান চাইবে। স্ক্রিনের নিচে x এর মান এক্ষেত্রে 5, যা বিবেচ্য নয়, এটি ক্যালকুলেটরে ব্যবহৃত x এর সর্বশেষ মান।

সমাধানের কাছাকাছি পছন্দ মতো একটি অনুমিত মান নিয়ে [=] বাটন চাপতে হবে। এই সমীকরণের ক্ষেত্রে $x = 1$ এবং $x = 5$ এর কাছাকাছি কোথাও সমাধান রয়েছে। $x = 1$ প্রবেশ করিয়ে [=] বাটন চাপলে ক্যালকুলেটর প্রথম সমাধান প্রদর্শন করে, যা নিচের বাম পাশের স্ক্রিনে দেখানো হয়েছে। আরেকটি সমাধানের জন্য পুনরায় [=] বাটন চাপতে হবে।

এই ক্ষেত্রে $x = 5$ একটি ভালো অনুমান। দ্বিতীয় স্ক্রিনের জন্য [=] বাটন চাপতে হবে।

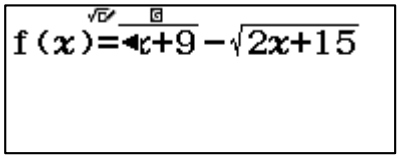


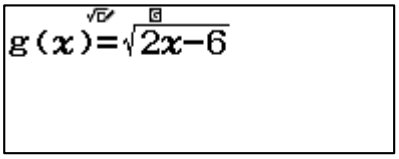


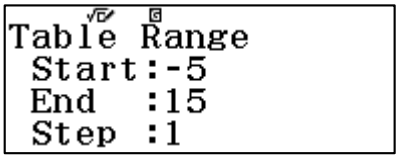
প্রতিটি স্ক্রিন সমীকরণের একটি সমাধান প্রদর্শন করে। এক্ষেত্রে $L - R$ সমীকরণের বামপক্ষ ও ডানপক্ষ- এর অন্তরফল নির্দেশ করে। প্রতিক্ষেত্রেই $L - R = 0$ নির্দেশ করে যে, বামপক্ষ ও ডানপক্ষ সমান।

৪.৩ দুইটি Table ব্যবহার করে

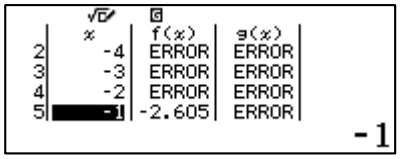
একটি সমীকরণের দুই পক্ষকে আলাদা আলাদা দুইটি ফাংশন $f(x), g(x)$ আকারে নিয়ে দুইটি তালিকা তৈরি করে সমীকরণের সমাধান করা যায়। উদাহরণস্বরূপ, $\sqrt{(8x+9)} - \sqrt{(2x+15)} = \sqrt{(2x-6)}$ সমীকরণ নেয়া হলো।

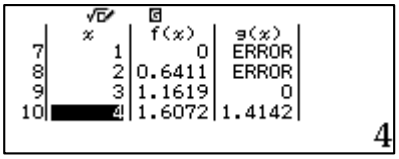


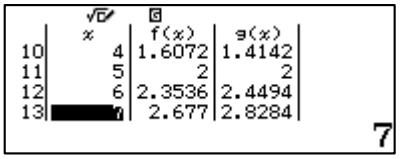




মানের তালিকাটি ভালোভাবে পর্যবেক্ষণ করতে হবে। এখানে কিছু মান দেখানো হলো।







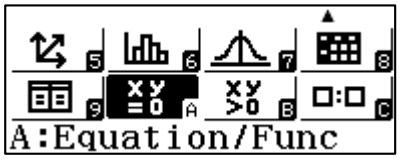
প্রথম স্ক্রিনে দেখা যাচ্ছে $x < -1$ এর জন্য $f(x)$ ও $g(x)$ এর মান অসংজ্ঞায়িত। দ্বিতীয় স্ক্রিনে দেখা যাচ্ছে যে, $-1 \leq x \leq 2$ এর জন্য $f(x)$ এর মান পাওয়া গেলেও $g(x)$ অসংজ্ঞায়িত। তৃতীয় স্ক্রিনে দেখা যাচ্ছে $x = 5$ এর জন্য $f(x) = g(x) = 2$. সুতরাং সমীকরণটির সমাধান $x = 5$

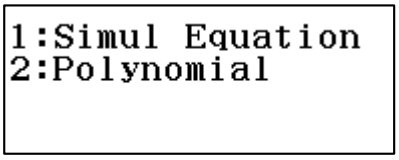
৪.৪ Equation *mode* ব্যবহার করে দ্বিঘাত সমীকরনের সমাধান

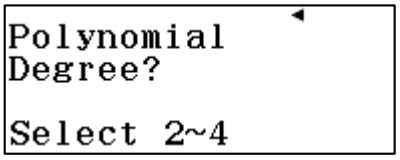
Equation *mode* এ দ্বিঘাত সমীকরণ সমাধানের সুবিধা রয়েছে। এই পদ্ধতিতে x এর ঘাতের নিম্নক্রম অনুসারে সহগগুলোকে প্রবেশ করাতে হবে। দ্বিঘাত সমীকরণের দুইটি সমাধান আছে, যা জটিল সংখ্যাও হতে পারে। ক্যালকুলেটরে দ্বিঘাত সমীকরণ সমাধানের জন্য সমীকরণটি প্রথমে আর্দশরূপে সাজাতে হবে যা ক্যালকুলেটরে নিম্নোক্তভাবে দেয়া আছে,

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Equation/Function *mode* এ যাওয়ার জন্য [MENU] [(−)] চাপতে হবে। এরপর পরপর দুইবার [2] চেপে দ্বিঘাত সমীকরণ নির্বাচন করতে হবে, যা নিচের স্ক্রিনে দেখানো হয়েছে-

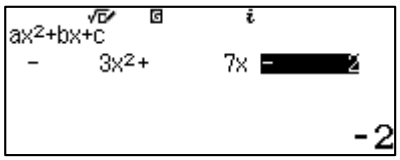


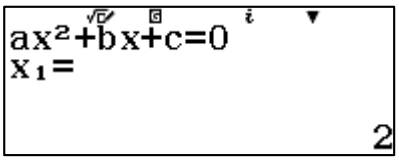


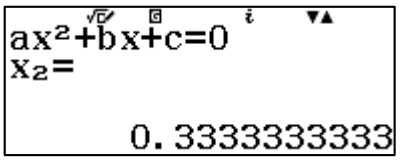


ধরা যাক, একটি সমীকরণ $7x - 2 - 3x^2 = 0$ সমীকরণটির সমাধান করার জন্য আদর্শ রূপে $ax^2 + bx + c = 0$ আকারে সাজালে $-3x^2 + 7x - 2 = 0$ পাওয়া যায়।

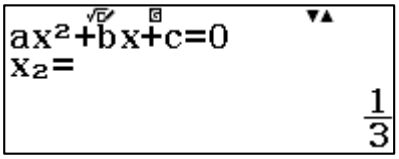
Equation *mode*-এ type 2 নির্বাচন করে তিনটি সহগ $a = -3, b = 7, c = -2$ প্রবেশ করানো হলো।





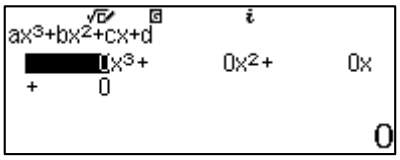


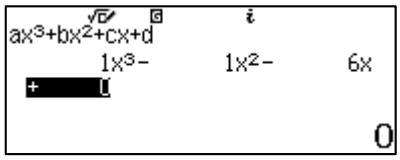
তৃতীয় স্ক্রিনে দেখা যাচ্ছে x_2 এর মান দশমিক সংখ্যায় প্রদর্শিত হয়েছে (যেহেতু ClassWiz এ Input/Output এর জন্য MathI/DecimalO সেট করা আছে)। ভগ্নাংশ আকারে মানটি পাওয়ার জন্য [S⇔D] বাটন চাপলে নিচের মতো করে ফলাফল প্রদর্শিত হবে।



৪.৫ ত্রিঘাত সমীকরণের সমাধান

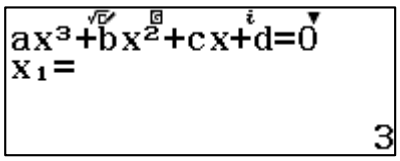
ত্রিঘাত সমীকরণ সমাধানের জন্য [MENU] [(−)] চেপে Equation/Function-এ প্রবেশ করার পর প্রথমে 2 এবং তারপর 3 চেপে ত্রিঘাত সমীকরণ নির্বাচন করতে হবে। উদাহরণস্বরূপ, ধরা যাক, একটি সমীকরণ $x^3 - x^2 - 6x = 0$. এক্ষেত্রে প্রথমে নিচের মতো করে a, b, c, d এর মান প্রবেশ করাতে হবে, যেগুলোর মান যথাক্রমে $1, -1, -6$ ও 0.

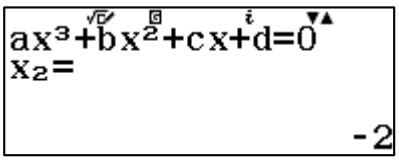


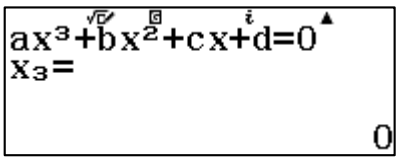


প্রত্যেকটি মান বসানোর পর [=] বাটন চাপতে হবে।

সমীকরণটি সমাধান করার জন্য পুনরায় [=] বাটন চাপতে থাকলে পর্যায়ক্রমে তিনটি মূল পাওয়া যাবে যা নিচে দেখানো হয়েছে।







[AC] চাপলে ক্যালকুলেটর সহগ প্রবেশের স্ক্রিন প্রদর্শন করবে। পুনরায় [AC] চাপলে সহগগুলো শূন্য হয়ে যাবে।

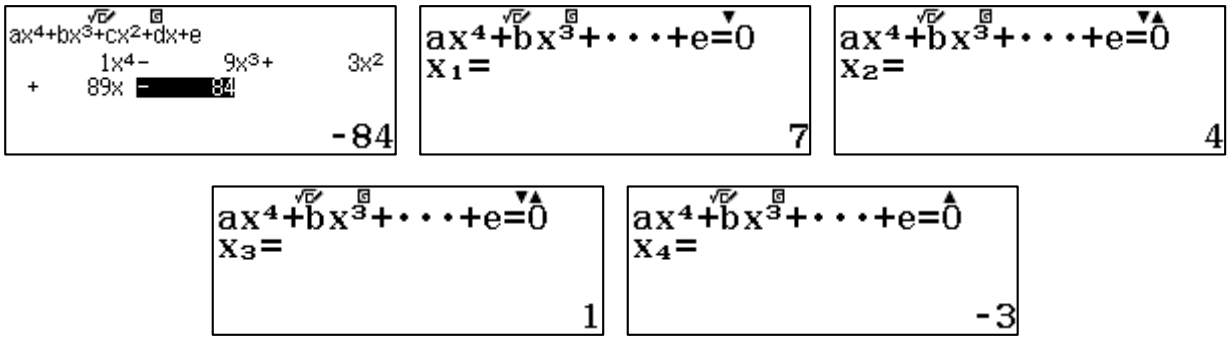
৪.৬ চতুর্ঘাত বিশিষ্ট সমীকরণের সমাধান।

ত্রিঘাত বিশিষ্ট সমীকরণের মতো করেই চতুর্ঘাত বিশিষ্ট সমীকরণ $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ এর সমাধান করা যায়। প্রথমে [MENU] [(−)] (A) ব্যবহার করে Equaction/Function *Mode* এ যেতে হবে। এরপর [2] চেপে Polynomial নির্বাচন করতে হবে। অতঃপর [4] চেপে চতুর্ঘাত সমীকরণ নির্বাচন করে যথাক্রমে a, b, c, d ও e এর মান প্রবেশ করিয়ে [=] বাটন চাপতে থাকলে পরপর সমীকরণের চারটি মূল প্রদর্শন করবে।

উদাহরণস্বরূপ, ধরা যাক একটি সমীকরণ-

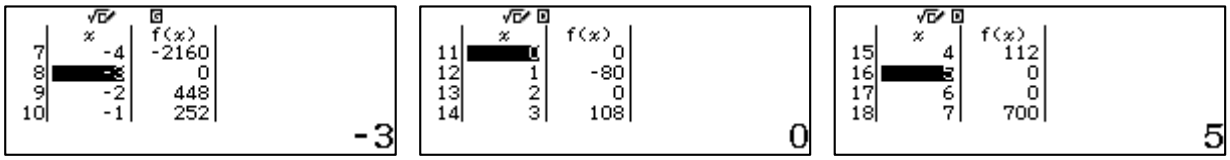
$$x^4 - 9x^3 + 3x^2 + 89x - 84 = 0$$

Equation/Function *mode* এ গিয়ে চতুর্ঘাত সমীকরণ নির্বাচন করার পর a, b, c, d ও e-এর মান হিসেবে যথাক্রমে $1, -9, 3, 89$ ও -84 প্রবেশ করালে x_1, x_2, x_3 ও x_4 এর মান যথাক্রমে $x_1 = 7, x_2 = 4, x_3 = 1$ ও $x_4 = -3$ প্রদর্শন করবে।



৪.৭ পঞ্চঘাত বিশিষ্ট সমীকরণের সমাধান

যদিও ClassWiz ক্যালকুলেটরে চতুর্ঘাত পর্যন্ত সমীকরণের সমাধান সরাসরি বের করা যায়, কিন্তু Table *mode* ব্যবহার করে আরো উচ্চঘাত বিশিষ্ট সমীকরণের সমাধান করা সম্ভব। এজন্য ক্যালকুলেটরকে [MENU] [9] চেপে Table *mode* এ নিতে হবে। এরপর $f(x)$ এর মান হিসেবে সমীকরণটি প্রবেশ করানোর পর $Start, End$ ও $Step$ মান প্রবেশ করিয়ে [=] চাপলে একটি মানের তালিকা প্রদর্শিত হবে। এই তালিকা থেকে x এর যে সকল মানের জন্য $f(x)$ এর মান শূন্য হয় সেইগুলো খুঁজে বের করতে হবে। কেননা এই সকল মানই হলো উক্ত সমীকরণের সমাধান। উল্লেখ্য যে, এই জন্য একটি বিস্তৃত ব্যবধি নিতে হয়। যদি প্রথমে নেয়া ব্যবধিতে প্রয়োজনীয় সংখ্যক মূল না থাকে তাহলে ব্যবধি পরিবর্তন করে আরো মূল খুঁজতে হবে। উদাহরণস্বরূপ ,একটি পঞ্চঘাতী সমীকরণ $x^5 - 10x^4 + 13x^3 + 96x^2 - 180x = 0$ নেয়া হলো। Start, End ও Step হিসেবে $-10, 10$ ও 1 নেয়া হয়েছে। মানের তালিকা হতে দেখা যায় $x = 2, -3, 5, 6, 0$ এর জন্য $f(x)$ এর মান শূন্য হয়। সুতরাং এই মানগুলোই হবে সমীকরণের মূল।



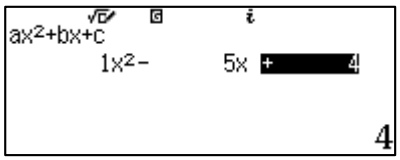
উদাহরণমালা

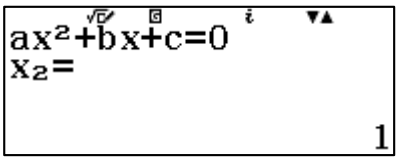
১. তিনটি পদ্ধতি ব্যবহার করে $x - 4 = \frac{x-4}{x}$ সমীকরণের সমাধান করতে হবে।

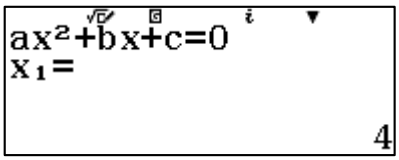
সমাধান-

Equation/Function *mode* ব্যবহার করে

Equation/Function *mode*- এ সমীকরণটি সমাধানের জন্য প্রথমে সরল আকারে প্রকাশ করলে $x^2 - 5x + 4 = 0$ পাওয়া যাবে। এরপর a, b, c এর মান যথাক্রমে $1, -5, 4$ [=] বাটন চেপে প্রবেশ করানো হলে সমীকরণের একটি মূল $x_1 = 4$ এবং আরেকটি মূল $x_2 = 1$ প্রদর্শন করবে।



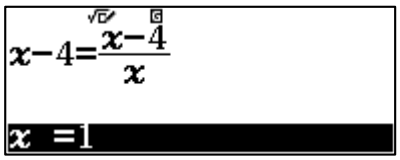


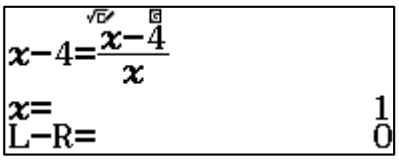


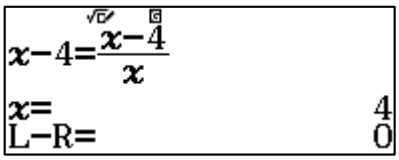
(Key log- [MENU] [(−)] [2] [2] [1] [=] [−] [5] [=] [4] [=] [=] [=])

Solve ব্যবহার করে

Solve *mode* -ব্যবহার করার জন্য প্রথমে ক্যালকুলেটরকে Calulate *mode* এ রাখতে হবে। এরপর সমীকরণটি নিচের স্ক্রিনের মতো টাইপ করতে হবে। অনুমিত মান $x = -2$ প্রবেশ করিয়ে [=] বাটন চাপলে দ্বিতীয় স্ক্রিনের মতো $x = 1$ প্রদর্শন করে। আবার x এর আরেকটি অনুমিত মান $x = 3$ প্রবেশ করালে দ্বিতীয় সমাধান $x = 4$ পাওয়া যাবে।



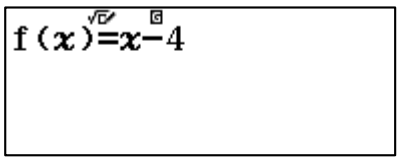


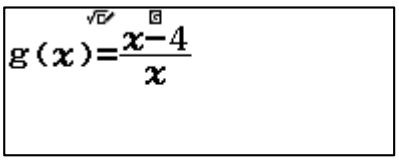


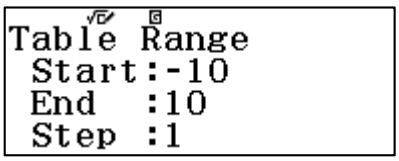
(Key log- [MENU] [1] [x] [−] [4] [ALPHA] [CALC] [▭] [x] [−] [4] [▼] [x] [SHIFT] [CALC] [−] [2] [=] [=] [=] [3] [=] [=])

Table *mode* ব্যবহার করে

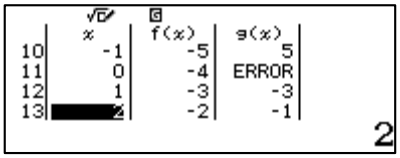
প্রথমে [MENU] [9] চেপে Table *mode* এ প্রবেশ করে সমীকরণের বামপক্ষকে $f(x)$ এবং ডানপক্ষকে $g(x)$ ধরে নিচের স্ক্রিনের মতো প্রবেশ করানো হলো। Start, End ও Step এর মান যথাক্রমে $-10,10$ ও 1 নেওয়া হলো।

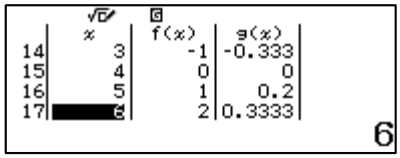






টেবিলটি ভালোভাবে পর্যবেক্ষণ করলে দেখা যায় যে, $x = 1$ এর জন্য $f(x) = g(x) = -3$ এবং $x = 4$ এর জন্য $f(x) = g(x) = 0$, x এর অন্য কোনো মানের জন্য $f(x)$ও $g(x)$ সমান নয়। সুতরাং $x = 1$ ও 4 সমীকরণটির সমাধান।

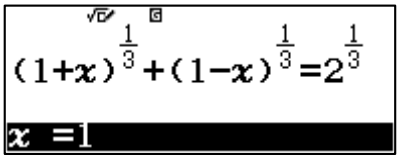


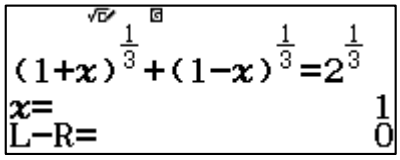


(Key log- MENU 9 x − 4 = ▭ x − 4 ▼ x = − 1 0 = 1 0 = 1 = =)

২. $(1+x)^{(1/3)} + (1-x)^{(1/3)} = 2^{(1/3)}$ সমীকরণটির সমাধান করতে হবে।

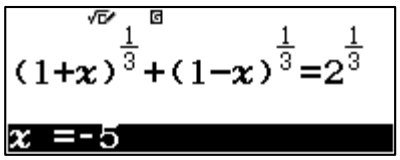
সমাধান- একে Solve বাটন দ্বারা সমাধানের জন্য প্রথমে নিচের স্ক্রিনের মতো করে ক্যালকুলেটরে টাইপ করা হলো।

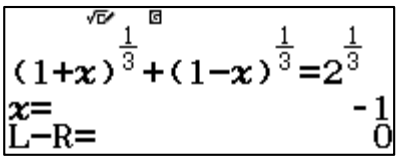


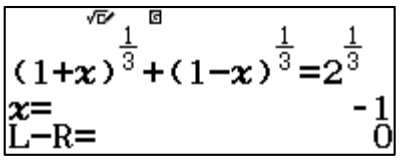


এরপর SHIFT CALC বাটন চাপতে হবে।

x এর মান 1 প্রবেশ করিয়ে = বাটন চাপলে একটি সমাধান $x = -1$ পাওয়া যাবে। আবার = বাটন চেপে মান-5 প্রবেশ করালে দ্বিতীয় স্ক্রিনের মতো $x = -1$ পাওয়া যাবে।





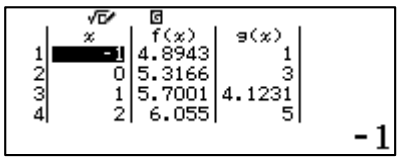


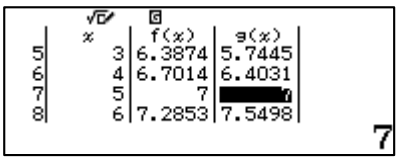
(Key log- MENU 1 (1 + x) $x^{■}$ ▭ 1 ▼ 3 ▶ ▶ + (1 − x) $x^{■}$ ▭ 1 ▼ 3 ▶ ▶ ALPHA CALC 2 $x^{■}$ ▭ 1 ▼ 3 SHIFT CALC 1 = = = − 5 = =)

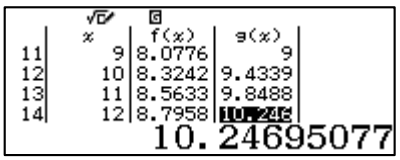
সুতরাং $x = 1$ ও $x = -1$ সমীকরণটির সমাধান।

৩. $\sqrt{(x+4)} + \sqrt{(x+11)} = \sqrt{(8x+9)}$

সমাধান- সমীকরণটি সমাধানের জন্য প্রথমে MENU 9 চেপে Table *mode* এ নিতে হবে। এরপর সমীকরণের বামপক্ষকে $f(x)$ এবং ডানপক্ষকে $g(x)$ ধরে, x এর মান -1 থেকে 20 পর্যন্ত এবং ব্যবধান 1 নিলে নিচের মতো তালিকা পাওয়া যাবে।





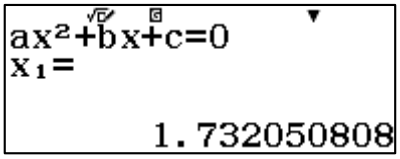


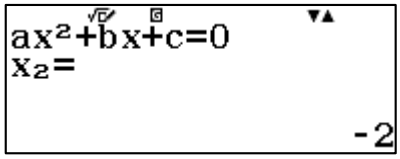
(Key log- MENU 9 √■ x + 4 ▶ + √■ x + 1 1 ▶ = √■ 8 x + 9 = − 1 = 2 0 = 1 = =)

তালিকায় দেখা যাচ্ছে $x = 5$ এর জন্য $f(x) = g(x) = 7$ সুতরাং $x = 5$ হবে সমীকরণটির সমাধান।

৪. $(x+2)(x-\sqrt{3})=0$

সমাধান- প্রথমে ক্যালকুলেটরে [MENU] [(−)] চেপে Equation/Function *mode* এ নিয়ে পরপর দুইবার 2 বাটন চেপে দ্বিঘাত সমীকরণ নির্বাচন করা হলো। এরপর সমীকরণটির অনুরূপ সমীকরণ $x^2+(2-\sqrt{3})x-2\sqrt{3}=0$ সরলীকরণ করে নিতে হবে। তারপর সহগগুলোর মান $1, (2-\sqrt{3})$ ও $-2\sqrt{3}$ যথাক্রমে ক্যালকুলেটরে প্রবেশ করলে নিচের স্ক্রিনের মতো সমীকরণের সমাধান পাওয়া যাবে।

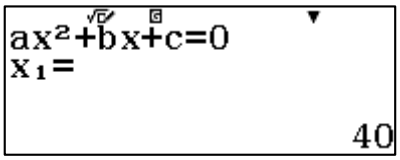


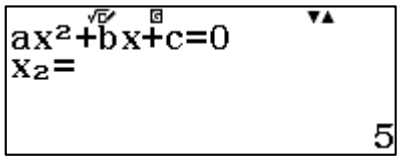


(Key log- [MENU] [(−)] [2] [2] [1] [=] [(] [2] [−] [√■] [3] [)] [)] [=] [−] [2] [√■] [3] [)] [=] [=] [=])

৫. 50 মিটার দৈর্ঘ্য ও 40 মিটার প্রস্থবিশিষ্ট একটি আয়তাকার বাগানের ভিতরের চারদিকে সমান চওড়া একটি রাস্তা আছে। রাস্তা বাদে বাগানের ক্ষেত্রফল 1200 বর্গমিটার হলে রাস্তাটি কত মিটার চওড়া তা বের করতে হবে।

সমাধান- ধরি,রাস্তাটি x মিটার চওড়া। রাস্তা বাদে বাগানটির ক্ষেত্রফল হবে $(50-2x)(40-2x)=1200$ বর্গমিটার। সমীকরণটির অনুরূপ সমীকরণ হবে $x^2-45x+200=0$. এই সমীকরণটি সমাধানের জন্য প্রথমে ক্যালকুলেটরে পূর্বের উদাহরণের মতো দ্বিঘাত সমীকরণ নির্বাচন করে সহগগুলোর মান যথাক্রমে $1, -45$ ও 200 প্রবেশ করাতে হবে। এরপর [=] বাটন চাপলে নিচের দুইটি স্ক্রিনের মতো x এর মান প্রদর্শন করবে।





(Key log- [MENU] [(−)] [2] [2] [1] [=] [−] [4] [5] [=] [2] [0] [0] [=] [=] [=])

এখানে $x_1=40$ এবং $x_2=5$ কিন্তু রাস্তার চওড়া অবশ্যই বাগানের প্রস্থ থেকে কম হবে। সুতরাং $x=5$ ই হবে সমস্যাটির সমাধান।

অনুশীলনী-৪

১। Solve ব্যবহার করে সমাধান কর-

(i) $\frac{5x}{7} - \frac{4}{5} = \frac{x}{5} - \frac{2}{7}$

(ii) $\frac{7x}{3} + \frac{3}{5} = \frac{2x}{5} - \frac{4}{3}$

২। Table *mode* ব্যবহার করে সমাধান কর-

(i) $(y-1)(y+2) = (y+4)(y-2)$

(ii) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{2}{x-1}$

৩। CALC ব্যবহার করে সমাধান কর-

(i) $\frac{6x+1}{15} - \frac{2x-4}{7x-1} = \frac{2x-1}{5}$

(ii) $\frac{x-2}{x+2} + \frac{6(x-2)}{x-6} = 1$

৪। Equation/Function *mode* ব্যবহার করে সমাধান কর-

(i) $2x(x+3) = 2x^2 + 12$

(ii) $(x+2)\left(x-\sqrt{3}\right) = 0$

পঞ্চম অধ্যায়

সরল সহসমীকরণ

(Simultaneous Equation)

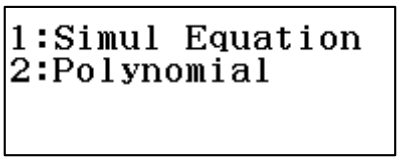
সরল সহসমীকরণ বলতে একাধিক চলকবিশিষ্ট একাধিক সরল সমীকরণকে বুঝায় যাদের যুগপৎ সমধান বের করতে হয়। এরূপ একাধিক সমীকরণকে একত্রে সরল সমীকরণ জোটও বলে। Equation *Mode* এর মাধ্যমে দুই, তিন বা চার চলক বিশিষ্ট System of linear equation সমাধান করা যায়। এই অধ্যায়ে ClassWiz ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে নিম্নোক্ত বিষয়গুলো সম্পর্কে আলোচনা করা হবে-

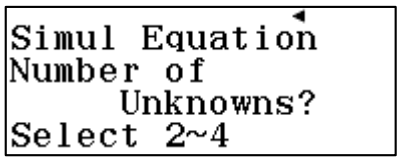
- দুই চলকবিশিষ্ট
- তিন চলকবিশিষ্ট ও
- চার চলকবিশিষ্ট

এজন্য Equation/Function *mode* ব্যবহার করতে হবে।

৫.১ দুই চলকবিশিষ্ট সরল সহসমীকরণের সমাধান

দুই চলকবিশিষ্ট সরল সহসমীকরণে সাধারণত x ও y দুইটি চলক ব্যবহার করা হয়। দুইটি সমীকরণ ব্যবহার করে x ও y এর মান বের করতে হয়। প্রথমে [MENU] [(−)](A) চেপে Equation/Function *mode*-এ প্রবেশ করতে হবে। [1] চাপার মাধ্যমে simultaneous equation নির্বাচন করার পর কতগুলো চলক আছে তা নির্ধারণ করতে হবে। সাধারণত কোনো সরল সহসমীকরণের সমাধানের জন্য চলক ও সমীকরণের সংখ্যা সমান হতে হয়।



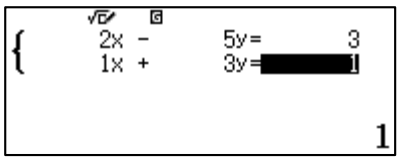


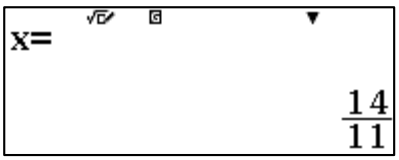
প্রত্যেক ক্ষেত্রে পদ্ধতিটি একই রকম। দুই চলক বিশিষ্ট একটি সরল সহসমীকরণ নেওয়া হলো-

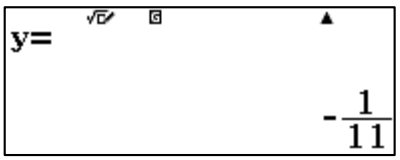
$$2x - 5y = 3$$

$$x + 3y = 1$$

এই সরল সহসমীকরণের সমাধান করার জন্য [2] চাপার মাধ্যমে দুই চলক বিশিষ্ট সমীকরণ নির্ধারণ করতে হবে। সমীকরণ দুইটি ক্যালকুলেটরে প্রবেশ করানোর জন্য ধ্রুবক মানগুলোকে [=] চিহ্নের ডানপাশে রাখতে হবে। এরপর নিচের মতো করে ছয়টি মান ক্যালকুলেটরে প্রবেশ করাতে হবে। প্রত্যেকটি মান প্রবেশ করানোর পর [=] বাটন চাপতে হবে। যেকোনো ভুলের জন্য কার্সরটিকে পিছনে নিয়ে গিয়ে সংশোধন করা যায়। মানগুলো প্রবেশ করানোর পরে [=] বাটন চাপলে x এর মান পাওয়া যাবে। পুনরায় [=] বাটন চাপলে y এর মান পাওয়া যাবে। এগুলোই হলো সমীকরণ জোটের সমাধান।





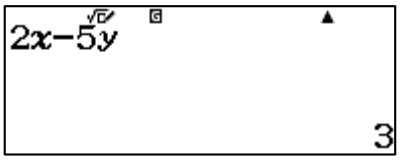


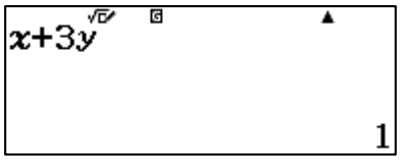
দ্রষ্টব্য: [S⇔D] বাটন চেপে দশমিক থেকে ভগ্নাংশ অথবা ভগ্নাংশ থেকে দশমিক আকারে ফলাফল পাওয়া যায়।

$x = \frac{14}{11}$ ও $y = \frac{1}{11}$ সমীকরণের সমাধান কি না তা পরীক্ষা করার জন্য প্রতিস্থাপন পদ্ধতিতে মানগুলো আসল সমীকরণে বসিয়ে পরীক্ষা করা যায়।

যেহেতু মানগুলো পূর্ণ সংখ্যা নয় তাই এগুলো নিয়ে কাজ করা কিছুটা জটিল। Calulate *mode* এর মাধ্যমে সহজে এই কাজ করার জন্য একটি ভাল পদ্ধতি বর্ণনা করা হলো। প্রথমে Equation *mode* এ প্রাপ্ত দুটি সমাধানের মান x ও y মেমোরিতে সংরক্ষণ করতে হবে। যখন x এর সমাধান পাওয়া যাবে সাথে সাথেই তা [STO] [x] ব্যবহার করে x মেমরীতে সংরক্ষণ করতে হবে। অনুরূপভাবে y এর সমাধান পাওয়ার সাথে সাথেই [STO] [S⇔D] ব্যবহার করে তা y মেমোরীতে সংরক্ষণ করতে হবে।

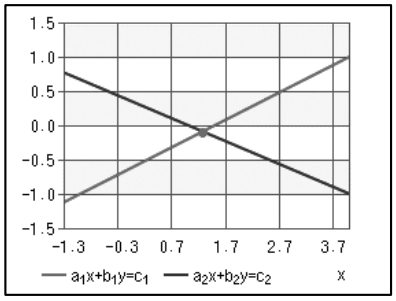
তারপর [MENU] [1] চাপার মাধ্যমে Calulate *mode* এ যেতে হবে। এরপর উভয় সমীকরণের বামপক্ষ নিচের স্ক্রিনের মতো করে ক্যালকুলেটরে প্রবেশ করিয়ে [=] বাটন চাপলে সমীকরণগুলোর বামপক্ষের মান ডানপক্ষের মানের সমান হয় কিনা অর্থাৎ মানগুলো সমীকরণদ্বয়কে সিদ্ধ করে কিনা তা বোঝা যাবে।





x ও y এর এই মানগুলোর জন্য $2x - 5y = 3$ এবং $x + 3y = 1$ যা সহসমীকরণের সত্যতা নিশ্চিত করে।

QR কোড থেকে প্রাপ্ত সহসমীকরণের লেখচিত্র নিচে দেখানো হলো।



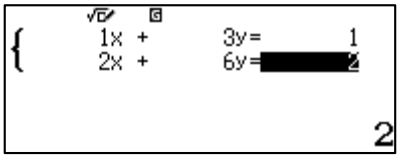
উপরের চিত্র হতে দেখা যাচ্ছে যে, সরলরেখা দুইটি একটি মাত্র বিন্দুতে ছেদ করেছে। এই ছেদবিন্দুটি হলো সমীকরণজোটের সমাধান।

সরল সহসমীকরণের ক্ষেত্রে সতর্ক থাকতে হবে কেননা সবসময় এদের সমাধান পাওয়া যায় না। নিচের উদাহরণটি লক্ষ্য করি-

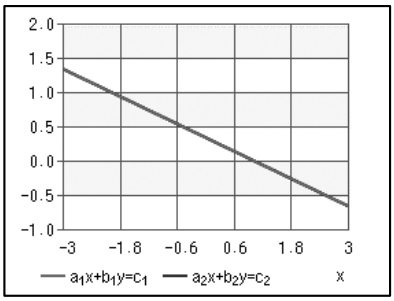
$$x + 3y = 1$$

$$2x + 6y = 2$$

ক্যালকুলেটরের মাধ্যমে এই সমীকরণের সমাধান করতে গেলে প্রাপ্ত ফলাফল প্রকাশ করবে যে এর অসংখ্য সমাধান রয়েছে, যা নিচের স্ক্রিনে দেখানো হলো-



QR কোড থেকে প্রাপ্ত সহসমীকরণের লেখচিত্র নিচে দেখানো হলো-



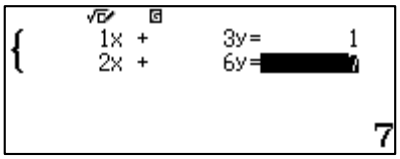
এক্ষেত্রে দুটি সমীকরণই মূলত একই। লক্ষণীয় যে, দ্বিতীয় সমীকরণটি মূলত প্রথম সমীকরণের দ্বিগুণ। যার ফলে যেকোনো এক জোড়া মান যা প্রথম সমীকরণকে সিদ্ধ করে, দ্বিতীয় সমীকরণকেও তা সিদ্ধ করবে। উদাহরণস্বরূপ $x = -2$ ও $y = 1$ সমীকরণদ্বয়কে সিদ্ধ করবে আবার $x = 5$ ও $y = 2$ এবং $x = 4$ ও $y = -1$ এবং এ ধরনের আরও অসংখ্য সমাধান রয়েছে। প্রথম সমীকরণের মতো $x + 3y$ এর মান যদি 1 হয় তাহলে $2(x + 3y) = 2x + 6y$ এর মান অবশ্যই $2 \times 1 = 2$ হবে যা দ্বিতীয় সমীকরণে দেখা যাচ্ছে। এ ধরনের সমীকরণের অসংখ্য সমাধান থাকে। উপরের লেখচিত্র হতে ধারণাটি পরিষ্কার হয়। লেখচিত্র হতে দেখা যাচ্ছে যে দুইটি সমীকরণ একই সরলরেখা নির্দেশ করছে। অর্থাৎ সরলরেখা দুইটি একে অপরের উপর উপরিপাতিত হয়েছে। সুতরাং এদের ছেদবিন্দুর পরিমাণ অসংখ্য হওয়ায় অসংখ্য সমাধান থাকবে।

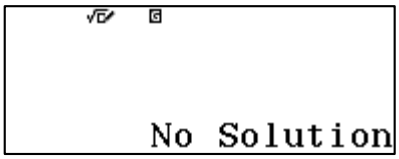
আরও কিছু সমীকরণ রয়েছে যাদের কোনো সমাধান পাওয়া যায় না। এখানে একটি উদাহরণ দেয়া হলো-

$$x + 3y = 1$$

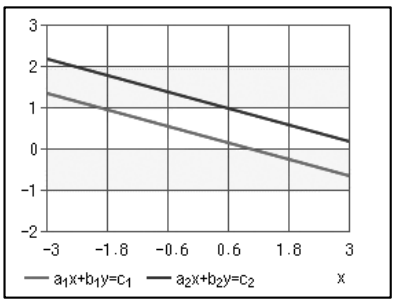
$$2x + 6y = 7$$

ক্যালকুলেটরের মাধ্যমে সমাধান করতে গেলে দেখা যাবে যে এদের কোনো সমাধান নেই।





QR কোড থেকে প্রাপ্ত সহসমীকরণের লেখচিত্র নিচে দেখানো হলো-



এই ক্ষেত্রে দুটি সমীকরণ অনুরূপ নয়, কিন্তু ভাল করে পর্যবেক্ষণ করলে দেখা যাবে যে, মূল সমস্যাটি হলো যদি $x + 3y = 1$ হয় তাহলে $2(x + 3y) = 2x + 6y$ এর মান অবশ্যই $2 \times 1 = 2$ হতে হবে। কিন্তু আমাদের

সহসমীকরণের দ্বিতীয় সমীকরণটি $2x + 6y = 7$ যা প্রথম সমীকরণের সাথে অসমঞ্জস (Inconsistent)। আবার সমীকরণ দুইটির দিকে ভালো করে লক্ষ্য করলে দেখা যায় যে এদের মধ্যে শুধুমাত্র ধ্রুবক মানটির পরিবর্তন হয়েছে। অর্থাৎ এগুলো দুইটি সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ যা উপরের লেখচিত্র হতে পরিষ্কার ভাবে বোঝা যাচ্ছে। সমীকরণ দুটি, সমান্তরাল সরলরেখাকে নির্দেশ করায় তাদের মধ্যে কোনো ছেদবিন্দু নেই। অর্থাৎ সমীকরণজোটের কোনো সমাধান নেই। এই ধরনের সহসমীকরণকে বলা হয় অসমঞ্জস ।

৫.২ তিন চলকবিশিষ্ট সমীকরণ জোটের সমাধান

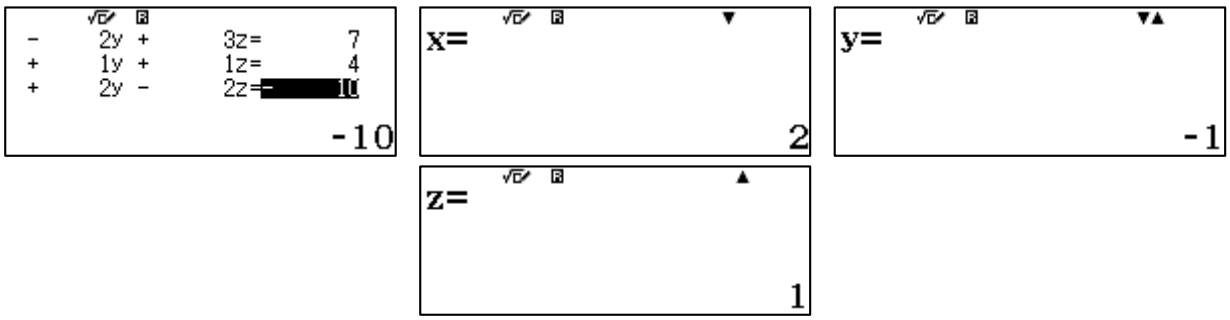
MENU (−) (A) চেপে Equation/Function *mode* এ প্রবেশ করার পর 1 চেপে Simultemouns Equation নির্বাচন করে তিন চলক বিশিষ্ট সমীকরণের জন্য 3 চাপতে হবে। অতঃপর সমীকরণের সহগগুলোর মান = চাপার মাধ্যমে পর পর প্রবেশ করিয়ে = চাপতে থাকলে ক্যালকুলেটর সমীকরণ জোটের মূলগুলোর মান প্রদর্শন করবে। ধরা যাক, তিন চলক বিশিষ্ট একটি সমীকরণ জোট

$$x - 2y + 3z = 7$$

$$2x + y + z = 4$$

$$-3x + 2y - 2z = -10$$

এই সরল সহসমীকরণ জোটের সমাধান করার জন্য Equation/Function *mode* এ গিয়ে 3 চলকবিশিষ্ট সমীকরণ নির্বাচন করার পর প্রথম সমীকরণে x এর সহগ $1, y$ এর সহগ $-2, z$ এর সহগ 3 ও ধ্রুবপদ 7 এবং এভাবে অন্যান্য সমীকরণের বাকি সহগগুলো প্রবেশ করাতে হবে। এরপর = চাপতে থাকলে পর্যায়ক্রমে $x = 2, y = -1$ ও $z = 1$ পাওয়া যাবে।



৫.৩ চার চলকবিশিষ্ট সমীকরণ জোটের সমাধান

দুই ও তিন চলকবিশিষ্ট সরল সহসমীকরণ জোটের সমাধানের অনুরূপভাবে চার চলক বিশিষ্ট সরল সহসমীকরণ জোটের সমাধানও ClassWiz-এর সাহায্যে সহজেই করা সম্ভব।

MENU (−) (A) চেপে Equation/Function *mode*-এ প্রবেশ করার পর 1 চেপে Simultemouns Equation নির্বাচন করে চার চলক বিশিষ্ট সমীকরণের জন্য 4 চাপতে হবে। অতঃপর সমীকরণের সহগগুলোর মান = চাপার মাধ্যমে পর পর প্রবেশ করিয়ে = চাপতে থাকলে Claculator সমীকরণ জোটের মূলগুলোর মান পর পর প্রদর্শন করবে। উদহারণস্বরূপ ধরা যাক একটি সমীকরণ জোট-

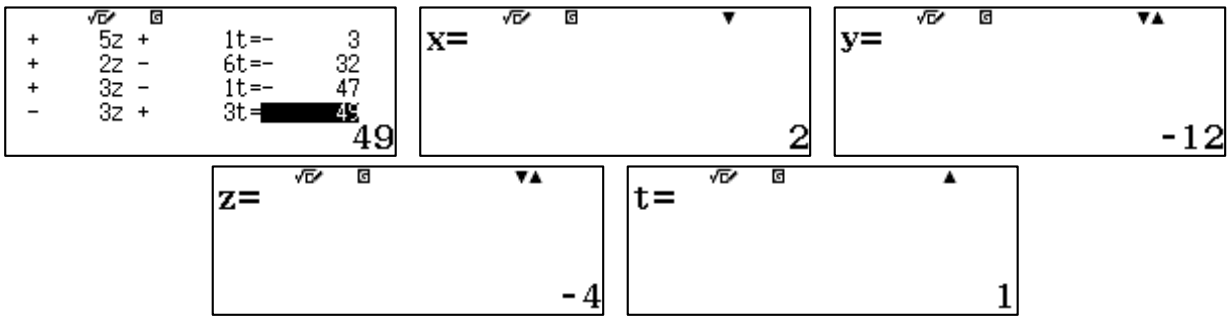
$$2x - y + 5z + t = -3$$

$$3x + 2y + 2z - 6t = -32$$

$$x + 3y + 3z - t = -47$$

$$5x - 2y - 3z + 3t = 49$$

এই সরল সহসমীকরণ জোটের সমাধান করার জন্য Equation/Function *mode* এ যেয়ে 4 চলক বিশিষ্ট সমীকরণ নির্বাচন করার পর প্রথম সমীকরণের x এর সহগ হিসেবে $2, y$ এর সহগ হিসেবে $-1, z$ এর সহগ হিসেবে $5, t$ এর সহগ হিসেবে 1 ও ধ্রুবপদ হিসেবে -3 এবং এইভাবে অন্যান্য সমীকরণের বাকি সহগ ও ধ্রুবপদগুলো অর্থাৎ যথাক্রমে $3,2,2,-6,-32,1,3,3,-1,-47,5,-2,-3,3,49$ [=] বাটন চাপার মাধ্যমে নিচের চিত্রের মতো প্রবেশ করালে সমীকরণের মূলগুলোর মান যথাক্রমে $x = 2, y = -12,\ z = -4$ এবং $t = 1$ পাওয়া যাবে।



উদাহরণমালা

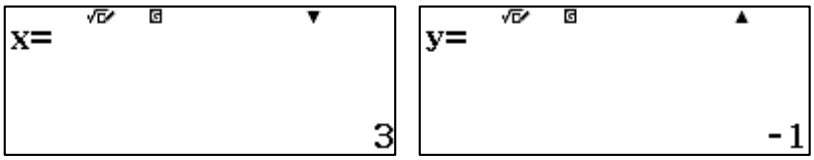
১। $x - y - 4 = 0$

$3x - y - 10 = 0$, সরল সহসমীকরণের সমাধান করতে হবে।

সমাধান- এই সমস্যা সমাধানের জন্য প্রথমে সমীকরণদ্বয়ের ধ্রুবপদকে সমান চিহ্নের ডানপাশে নিতে হবে। সুতরাং উক্ত সমীকরণ জোটের অনুরূপ সমীকরণ জোট হলো-

$$x - y = 4$$
$$3x - y = 10$$

এরপর ক্যালকুলেটরে Equation/Function *mode*-এ গিয়ে ২ চলক বিশিষ্ট Simultaneous equation নির্বাচন করতে হবে। সহগগুলো পর্যায়ক্রমে ক্যালকুলেটরে প্রবেশ করিয়ে [=] বাটন চাপলে নিচের স্ক্রিনের মতো ফলাফল প্রদর্শিত হবে।

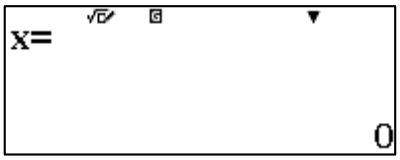


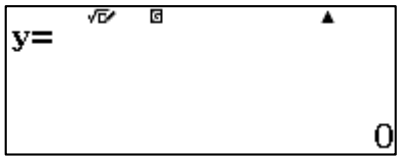
(Key log- [MENU] [(−)] [1] [2] [1] [=] [−] [1] [=] [4] [=] [3] [=] [−] [1] [=] [1] [0] [=] [=] [=])

২। $-\frac{1}{2}x - y = 0$

$x - 2y = 0$ সমাধান করতে হবে।

সমাধান- ক্যালকুলেটরে Equation/Function *mode*-এ গিয়ে 2 চলকবিশিষ্ট Simultaneous equation নির্বাচন করতে হবে। সহগগুলো পর্যায়ক্রমে প্রবেশ করিয়ে [=] বাটন চাপলে নিচের স্ক্রিনের মতো ফলাফল প্রদর্শিত হবে।



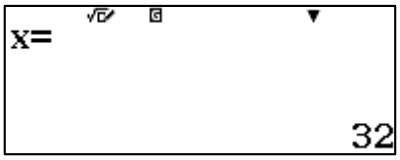


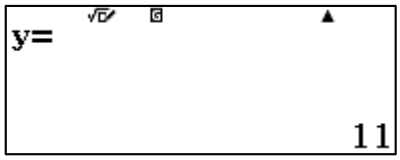
৩। আট বছর পূর্বে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের আটগুণ ছিল। দশ বছর পর পিতার বয়স পুত্রের বয়সের দ্বিগুন হবে। বর্তমানে কার বয়স কত তা বের করতে হবে।

সমাধান- প্রথমেই পিতার বর্তমান বয়সকে x ও পুত্রের বর্তমান বয়সকে y ধরে নেওয়া যাক। তাহলে প্রদত্ত শর্তানুসারে সমীকরণ জোট হবে

$$x - 8 = 8(y - 8) \Rightarrow x - 8y = -56$$
$$x + 10 = 2(y + 10) \Rightarrow x - 2y = 10$$

এরপর ক্যালকুলেটরে Equation/Function *mode* এ গিয়ে দুই চলক বিশিষ্ট Simultaneous equation নির্বাচন করে পূর্বে আলোচিত সমস্যার মতো করে সমাধান করলে নিচের স্ক্রিনে মতো ফলাফল প্রদর্শিত হবে।





(Key log- [MENU] [(−)] [1] [2] [1] [=] [−] [8] [=] [−] [5] [6] [=] [1] [=] [−] [2] [=] [1] [0] [=] [=] [=])

স্ক্রিন হতে দেখা যাচ্ছে, $x = 32$ ও $y = 11$ সুতরাং পিতার বর্তমান বয়স 32 বছর এবং পুত্রের বর্তমান বয়স 11 বছর।

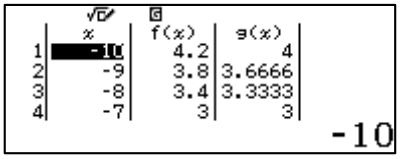
৪। $2x + 5y = 1$

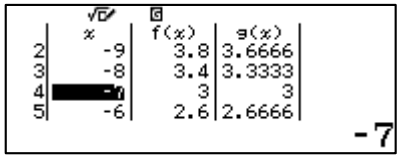
$x + 3y = 2$, সরল সমীকরণ জোটকে লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান করতে হবে।

সমাধান- এটি করার জন্য প্রথমে উভয় সমীকরণ থেকে y এর মান বের করতে হবে।

$$y = \frac{1-2x}{5}, \qquad y = \frac{2-x}{3}$$

ক্যালকুলেটরে [MENU] [9] চেপে Table *mode* নির্বাচন করতে হবে। এরপর সমীকরণ জোটের প্রথম সমীকরণের ডানপক্ষকে $f(x)$ ও দ্বিতীয় সমীকরণের ডানপক্ষকে $g(x)$ হিসেবে ক্যালকুলেটরে প্রবেশ করানো হলো। Start, End ও step হিসেবে $-10,10$ ও 1 নেওয়া হলো। এরপর [=] বাটন চাপলে মানের একটি তালিকা পাওয়া যাবে। মানের তালিকায় $(x, f(x))$ হবে প্রথম সমীকরণের বিন্দু এবং $(x, g(x))$ হবে দ্বিতীয় সমীকরনের বিন্দু।

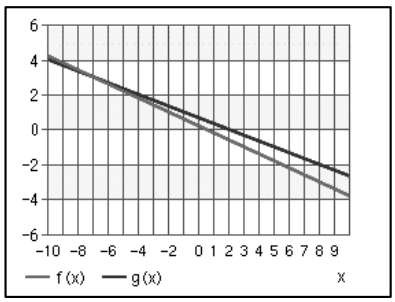




এরপর বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করলে দুইটি সরলরেখা পাওয়া যাবে। মানের তালিকায় দেখা যাচ্ছে $x = -7$ এর জন্য $f(x)$ ও $g(x)$ এর মান সমান এবং তা 3.

সুতরাং $(-7, 3)$ হবে সমাধান বিন্দু।

আবার QR কোড হতে প্রাপ্ত লেখচিত্র থেকেও এর সত্যতা পাওয়া যায়।



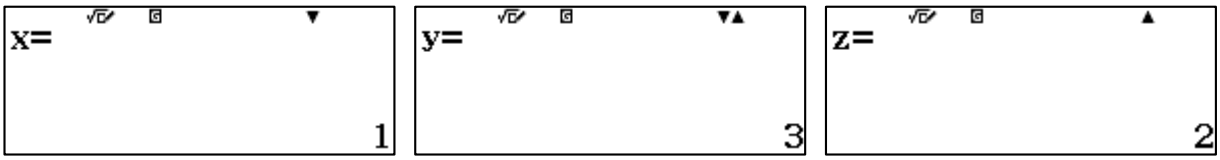
(Key log- MENU 9 ▭/▭ 1 − 2 x ▶ 5 = ▭/▭ 2 − x ▶ 3 = − 1 0 = 1 0 = 1 = = ▼ ▼ ▼ ▼ ▲ SHIFT OPTN)

৫। $7x + 5y - 3z = 16$

$3x - 5y + 2z = -8$

$5x + 3y - 7z = 0,$ এর সমাধান করতে হবে।

সমাধান- তিন চলক বিশিষ্ট এই সমীকরণ জোটকে সমাধান করার জন্য প্রথমে Equation/Function *mode* এ গিয়ে 3 চলকবিশিষ্ট Simultaneous equation নির্বাচন করতে হবে। এরপর সহগগুলো প্রবেশ করিয়ে = বাটন চাপলে নিচের স্ক্রিনের মতো ফলাফল প্রদর্শিত হবে।



(Key log- MENU (−) 1 3 7 = 5 = − 3 = 1 6 = 3 = − 5 = 2 = − 8 = 5 = 3 = − 7 = 0 = = = =)

অনুশীলনী-৫

নিচের সরল সহসমীকরণগুলো সমঞ্জস, পরস্পর নির্ভরশীল/অনির্ভরশীল কি না যুক্তিসহ উল্লেখ কর এবং ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে এগুলোর সমাধান বের কর-

১। $x - y = 4$

$x + y = 10$

২। $x - y - 4 = 0$

$3x - 3y - 10 = 0$

৩। $3x + 2y = 0$

$9x - 6y = 0$

৪। $5x - 2y - 16 = 0$

$3x - \frac{6}{5}y = 5$

৫। $-\frac{1}{2}x + y = -1$

$x + y = 5$

৬। $2x + 5y + 2z = -38$

$3x - 2y + 4z = 17$

$-6x + y - 7z = -12$

৭। $3x - 9z = 33$

$7x - 4y - z = -15$

$4x + 6y + 5z = -6$

ষষ্ঠ অধ্যায়

অসমতা

(Inequality)

অসমতার সূচনা অনুমান থেকে। দালান তৈরির ক্ষেত্রে, পুস্তক মুদ্রণের ক্ষেত্রে এবং এরকম আরো অনেক ক্ষেত্রে উপাদানগুলো সঠিক পরিমাণে নির্ণয় করা যায় না বিধায় প্রাথমিক পর্যায়ে অনুমানের ভিত্তিতে উপাদানগুলো ক্রয় বা সংগ্রহ করতে হয়। আর এ ধরণের অনুমান থেকেই অসমতার সূচনা। ধরা যাক, কোনো অফিসে কর্মকর্তা,কর্মচারির সংখ্যা ৫০ জন । ঐ অফিসে প্রতিদিন সকলে উপস্থিত থাকেনা। একটি নির্দিষ্ট দিনে উপস্থিতির সংখ্যা x হলে আমরা লিখতে পারি $0 < x \leq 50$. আর এটি হলো অসমতা। অন্য ভাবে বলতে গেলে অসমতো হলো এমন দুইটি রাশির মধ্যে সম্পর্ক যারা একে অপরের সমান নয়। অসমতার চিহ্নগুলো হলো-

$$<, \quad >, \quad \leq, \quad \geq$$

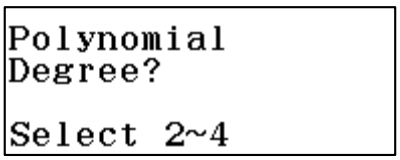
ক্যালকুলেটরে স্বয়ংক্রিয়ভাবে অসমতার সমাধান করা যায়। এই অধ্যায়ে ClassWiz ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে নিম্নোক্ত বিষয়গুলো সম্পর্কে আলোচনা করা হবে-

- দ্বিঘাতযুক্ত অসমতার সমাধান
- ত্রিঘাতযুক্ত অসমতার সমাধান
- চতুর্ঘাতযুক্ত অসমতার সমাধান

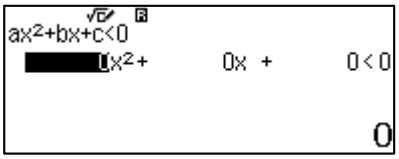
এজন্য ক্যালকুলেটরে [MENU] [∘,,,] চেপে Inequality *mode* নির্বাচন করতে হবে।

৬.১ দ্বিঘাত অসমতার সমাধান

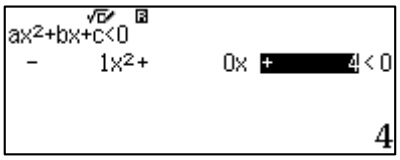
দ্বিঘাতযুক্ত অসমতার সমাধান Casio ClassWiz-এ সরাসরি করা যায়। প্রথমে ক্যালকুলেটরে [MENU] [∘,,,] চেপে Inequality *mode* নির্বাচন করতে হবে। এরপর [2] চাপলে নিচের দ্বিতীয় স্ক্রিনের মতো একটি স্ক্রিন পাওয়া যাবে যেখানে চার ধরণের দ্বিঘাত অসমতার আদর্শ রূপ দেওয়া আছে। যে ধরনের অসমতার সমাধান করতে হবে তা এই স্ক্রিন থেকে নির্বাচন করতে হবে।

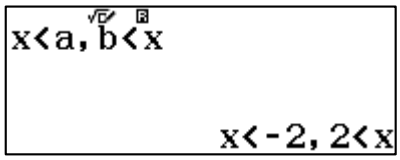


উদাহরণস্বরূপ ধরা যাক, $-x^2 + 4 < 0$ অসমতোটি দ্বিতীয় স্ক্রিনের 2 নং অসমতার ন্যায়। তাই [2] চেপে 2 নাম্বার অসমতোটি নির্বাচন করতে হবে। ফলে নিচের স্ক্রিনের মতো একটি স্ক্রিন পাওয়া যাবে।

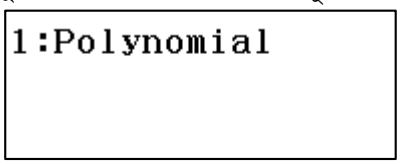


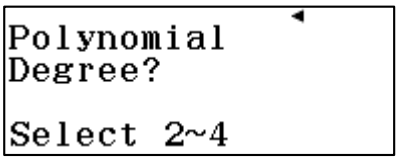
এরপর x^2 এর সহগ $-1, x$ এর সহগ 0 এবং ধ্রুবক অর্থাৎ c এর মান 4 প্রবেশ করিয়ে [=] বাটন চাপলে নিচের দ্বিতীয় স্ক্রিনের মতো ফলাফল পাওয়া যাবে।



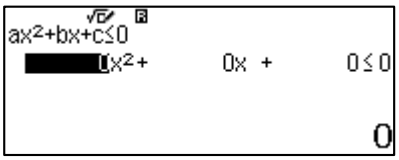


ফলাফলে প্রদর্শিত a ও b মূল অসমতার সহগ নয় বরং সমাধানের আকৃতি বোঝানোর জন্য প্রদর্শন করছে।
আবার একটি অসমতো $x^2 + 2x - 15 \leq 0$ নেওয়া হলো। নতুন অসমতো প্রবেশ করানোর জন্য [OPTN] চেপে পুনরায় দ্বিঘাত নির্বাচন করলে পূর্বের মতো চার ধরনের অসমতা প্রদর্শন করবে।

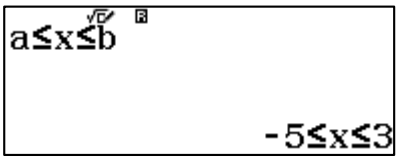




এরপর উক্ত সমস্যার জন্য [4] চেপে 4 নং আদর্শ রূপ নির্বাচন করতে হবে।



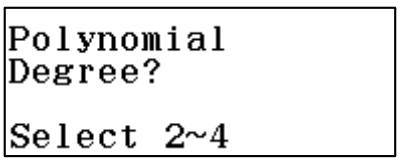
x^2 ও x এর সহগ এবং ধ্রুবক অর্থাৎ $a = 1, b = 2, c = -15$ প্রবেশ করিয়ে [=] চাপলে নিচের স্ক্রিনের মতো ফলাফল প্রদর্শিত হবে।

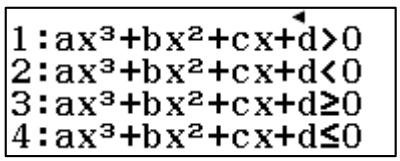


এখানে $a \leq x \leq b$ শুধুমাত্র সমাধানের আকৃতি নির্দেশ করে।

৬.২ ত্রিঘাতযুক্ত অসমতা

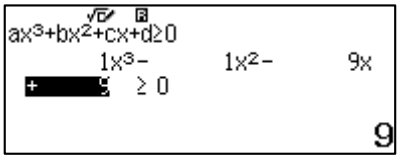
ত্রিঘাতযুক্ত অসমতার সমাধান করার জন্য [MENU] [...] চাপার পর [3] চেপে ত্রিঘাত Polynomial নির্বাচন করতে হবে। ফলে নিচের দ্বিতীয় স্ক্রিনের মতো একটি স্ক্রিন প্রদর্শিত হবে।

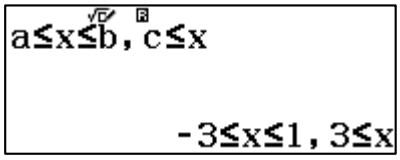




এরপর প্রয়োজন অনুসারে অসমতা নির্বাচন করে এর সমাধান করা যায়।

যেমন, $x^3 - x^2 - 9x + 9 \geq 0$ অসমতোটির সমাধান করার জন্য [3] চাপতে হবে। এরপর $a = 1, b = -1, c = -9, d = 9$ প্রবেশ করিয়ে [=] চাপলে নিচের দ্বিতীয় স্ক্রিনের মতো ফলাফল প্রদর্শিত হবে।

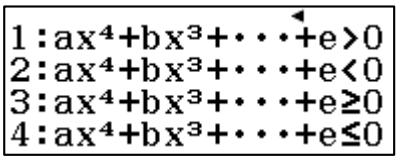




লক্ষণীয়যে a, b, c সমাধানের আকৃতি বুঝানোর জন্য প্রদর্শিত হয়েছে।

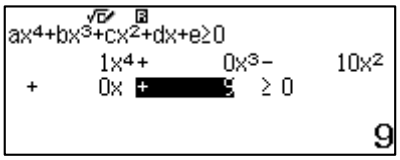
৬.৩ চতুর্ঘাতযুক্ত অসমতা

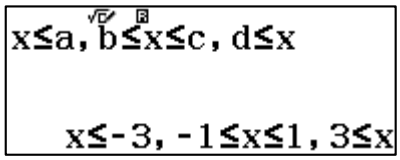
Casio ClassWiz এ চতুর্ঘাত পর্যন্ত অসমতার সমাধান করা যায়। এর জন্য [MENU] [∘,,,] চেপে প্রথমে inequality *mode* নির্বাচন করার পর [4] চেপে চতুর্ঘাত নির্বাচন করলে নিচের স্ক্রিনের মতো একটি স্ক্রিন আসবে।



উপরের স্ক্রিনে চতুর্ঘাতযুক্ত অসমতার চারটি আদর্শরূপ প্রদর্শিত হয়েছে।

ধরা যাক, $x^4 - 10x^2 + 9 \geq 0$ অসমতাটির সমাধান করতে হবে। এর জন্য [3] চাপার পর $a = 1, b = 0, c = -10, d = 0, e = 9$ প্রবেশ করাতে হবে। এরপর [=] বাটন চাপলে নিচের দ্বিতীয় স্ক্রিনের মতো ফলাফল প্রদর্শিত হবে।

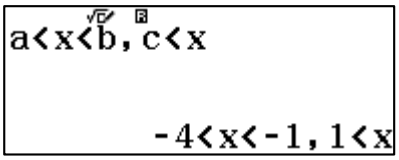




উদাহরণমালা

১। $x^3 + 4x^2 > x + 4$

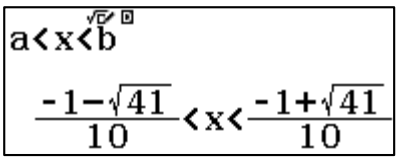
সমাধান- প্রথমে অসমতাটিকে ঘাতের নিম্নক্রম অনুসারে সাজিয়ে নিতে হবে। অর্থাৎ $x^3 + 4x^2 - x - 4 > 0$ এরপর ক্যালকুলেটরে [MENU] [∘,,,] চাপার পর [3] চেপে ত্রিঘাত নির্বাচন করতে হবে। এরপর [1] চেপে আদর্শ আকার নির্বাচন করার পর $a = 1, b = 4, c = -1, d = -4$ প্রবেশ করিয়ে [=] চাপলে ফলাফল প্রদর্শিত হবে।



(Key log- [MENU] [∘,,,] [3] [1] [1] [=] [4] [=] [−] [1] [=] [−] [4] [=] [=])

২। $5x^2 + x - 2 < 0$

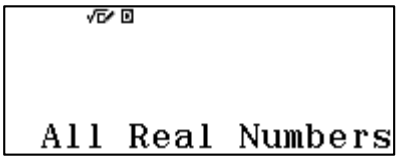
সমাধান- [MENU] [∘,,,] চাপার পর [2] চেপে দ্বিঘাত অসমতা নির্বাচন করতে হবে। এরপর আবার [2] চেপে অসমতার আদর্শ আকার নির্বাচন করে $a = 5, b = 1, c = -1$ প্রবেশ করিয়ে [=] চাপলে ফলাফল প্রদর্শিত হবে।



(K e y l o g - MENU ◦,,, 2 2 5 = 1 = − 2 = =)

৩। $8x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 8 > 0$

সমাধান- MENU ◦,,, চাপার পর 4 চেপে চতুর্ঘাত অসমতা নির্বাচন করতে হবে। এরপর আবার 1 চেপে অসমতার আদর্শ আকার নির্বাচন করে সহগগুলো প্রবেশ করিয়ে = চাপলে নিচের স্ক্রিনের মতো ফলাফল প্রদর্শন করবে।

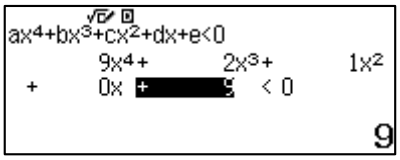


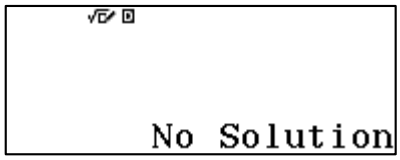
ফলাফল হতে বোঝা যায় যে, যেকোনো বাস্তব সংখ্যার জন্য অসমতোটি সত্য।

(Key log- MENU ◦,,, 4 1 8 = − 3 = 2 = − 1 = 8 = =)

৪। $9x^4 + 2x^3 + x^2 + 9 < 0$

সমাধান- পূর্বের উদাহরণের মতো চতুর্ঘাত নির্বাচন করতে হবে। এরপর 2 চেপে অসমতার আদর্শ আকার নির্বাচন করে সহগগুলো প্রবেশ করিয়ে = চাপলে ক্যালকুলেটর নিচের স্ক্রিনের মতো no solution প্রদর্শন করবে। অর্থাৎ এই অসমতাটি কোনো বাস্তবসংখ্যার জন্যই সত্য নয়।





(Key log- MENU ◦,,, 4 2 9 = 2 = 1 = 0 = 9 = =)

অনুশীলনী-৬

১। সমাধান কর-

(ক) $2x^2 + 4x \geq x^2 - x - 6.$

(খ) $x^2 + x + 1 > 0$.

(গ) $x^2 + 2x - 8 \leq 0.$

(ঘ) $-x^2 + 6x - 9 \geq 0.$

২। সমাধান কর-

(ক) $3x^3 - 8x^2 + 2x - 9 > 0$

(খ) $x^3 \geq 4x^2 - 3x$

(গ) $t^4 + t^3 - 12t^2 < 0$

(ঘ)$12x^4 - x > x^2 + 14$

সপ্তম অধ্যায়

সূচকীয় ও লগারিদমীয় ফাংশন

(Logarithm and Indices)

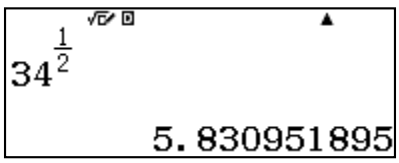
সূচকের সাহায্যে অনেক বড় বা অনেক ছোট সংখ্যা বা রাশিকে খুব সহজেই প্রকাশ করা যায়। আর এই সূচক থেকেই লগারিদমের উৎপত্তি। সূচক ও লগারিদমের সাহায্যে বিভিন্ন রকম হিসাব গণনা ও গাণিতিক সমস্যার সমাধান সহজতর হয়েছে। সূচকের মাধ্যমে যেমন সংখ্যার বৈজ্ঞানিক বা আদর্শ রূপ প্রকাশ করা হয় তেমনি লগারিদমের মাধ্যমে সংখ্যা বা রাশির গুন, ভাগ ও সূচক সম্পর্কিত গণনার কাজ সহজে হয়েছে। এই অধ্যায়ে ClassWiz ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে নিম্নোক্ত বিষয়গুলো সম্পর্কে আলোচনা করা হবে-

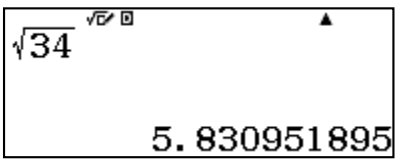
- সূচক ও মূল এর ধারণা
- লগারিদমের ধারণা
- লগারিদমের বৈশিষ্ট্য
- বিভিন্ন ভিত্তিযুক্ত লগারিদম এবং
- e ও স্বাভাবিক লগারিদম (ln)

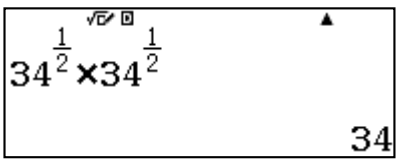
এজন্য [MENU] [1] চেপে $Calculate\ mode$ ব্যবহার করতে হবে।

৭.১ সূচক এবং মূল

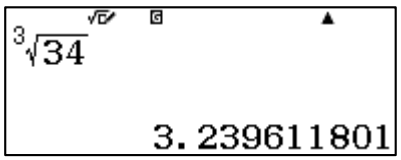
সংখ্যার ঘাত যেমন দ্বিঘাত, ত্রিঘাতের মান এবং তাদের মূল বের করার পদ্ধতি পূর্বেই আলোচনা করা হয়েছে। ক্যালকুলেটরে দ্বিঘাত বাটন চাপলে এটি সংখ্যাটিকে দুই বার গুণ করার মাধ্যমে বের করে। ধরা যাক, ক্যালকুলেটরে [x^2] বাটন ব্যবহার করে 34^2 বের করতে হবে। তখন প্রকৃতপক্ষে 34×34 বের করে ক্যালকুলেটর ফলাফল দেয়। অন্যান্য সূচক যেমন দশমিক বা ভগ্নাংশ অথবা উচ্চতর ঘাত প্রবেশ করানোর জন্য [$x^{\blacksquare}$] কী ব্যবহার করতে হয়। উচ্চতর ঘাত 34^5 যতটা স্পষ্টভাবে বোঝা যায়, $34^{\frac{2}{5}}$ বা $34^{0.43}$ ততটা স্পষ্ট ভাবে বোঝা যায় না । যখন কোনো সংখ্যাকে $\frac{1}{2}$ ঘাতে উন্নীত করা হয় তখন প্রকৃতপক্ষে এর বর্গমূল বের করা হয়। যা নিচের চিত্রে প্রদর্শিত হয়েছে।

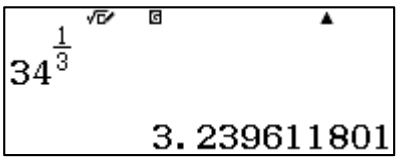


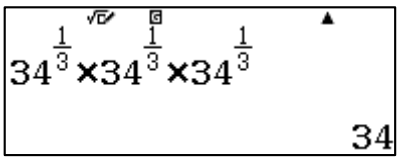




ঘনমূলের জন্যও একই কথা প্রযোজ্য-





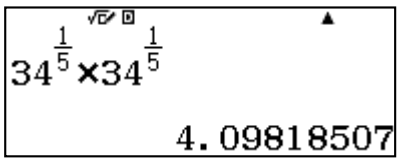


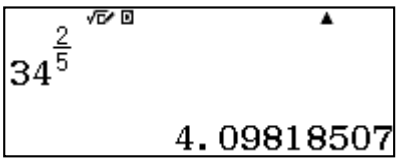
এই বৈশিষ্ট্যগুলো সূচকের ধর্মের উপর নির্ভর করে, যেহেতু একই নিধান বা ভিত্তি (base) যখন গুণ অবস্থায় থাকে তখন এদের সূচকগুলো যোগ হয়। এই ধারণা দশমিক বা ভগ্নাংশ ঘাতবিশিষ্ট সংখ্যা বুঝতে সাহায্য করে। $34^{\frac{2}{5}}$, এর জন্য সূচকের বৈশিষ্ট্য ব্যবহার করে পাওয়া যায়-

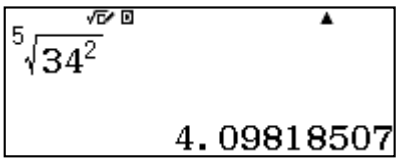
$$34^{\frac{2}{5}} = 34^{\frac{1}{5}+\frac{1}{5}} = 34^{1/5} \times 34^{1/5} = \left(34^{\frac{1}{5}}\right)^2$$

$$or, 34^{2/5} = 34^{2\times\frac{1}{5}} = (34^2)^{\frac{1}{5}}$$

অতএব বলা যায়, এটি 34 এর পাঁচ-তম মূলের দ্বিঘাত। অন্যভাবে, এটি 34 এর দ্বিঘাতের পাঁচ-তম মূল।







ক্যালকুলেটর উভয়ভাবেই একই ফলাফল প্রদর্শন করে। এক্ষেত্রে সূচক বাটন $\boxed{x^{\blacksquare}}$ এবং মূল ($^{\blacksquare}\sqrt{\square}$) ($\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{x^{\blacksquare}}$) বাটন ব্যবহার করতে হয়। লক্ষ্য করলে দেখা যাবে, $34^{\frac{2}{5}}$ সংখ্যাটি $\sqrt{34}$ এর চেয়ে ছোট, কারণ $\frac{2}{5}, \frac{1}{2}$ এর চেয়ে ছোট।

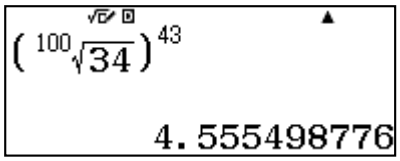
34 এর জন্য এই বৈশিষ্ট্যগুলো পর্যালোচনা করা হলেও, যে কোনো ধনাত্মক সংখ্যার জন্য এটি প্রযোজ্য। কোনো সংখ্যাকে যেকোনো ঘাতে উন্নীত করার জন্য একটি গুরুত্বপূর্ণ সম্পর্ক হলো,

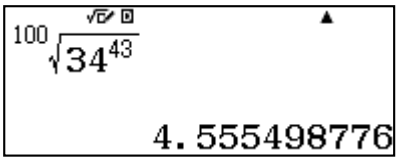
$$x^{\frac{m}{n}} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m$$

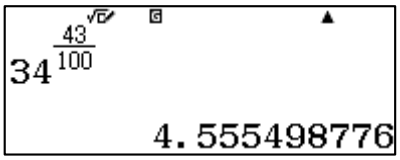
$$\text{অথবা, } x^{\frac{m}{n}} = (x^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$$

যেখানে m যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা ও n অশূন্য পূর্ণ সংখ্যা এবং $x > 0$ যেকোনো ভিত্তি।

যদিও উপরের পদ্ধতিগুলো ব্যবহার করে যেকোনো ঘাত বিশিষ্ট সংখ্যার মান বের করা যায়, কিন্তু $\boxed{x^{\blacksquare}}$ বাটন ব্যবহার করে সরাসরি মান বের করা আরো সুবিধাজনক। নিচের তিনটি স্ক্রিনে তিনভাবে $34^{0.43}$ এর মান বের করার পদ্ধতি দেখানো হলো-







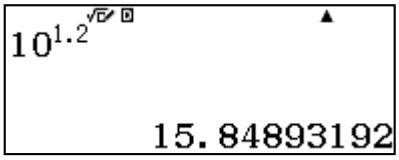
উপরের স্ক্রিনগুলোতে লক্ষণীয় যে, যেহেতু ঘাতসমূহ $\frac{2}{5} < \frac{43}{100} < \frac{1}{2}$ ক্রম অনুসরণ করে অতএব সংখ্যাগুলোর মাঝেও ক্রম থাকবে অর্থাৎ, $34^{\frac{2}{5}} < 34^{\frac{43}{100}} < 34^{\frac{1}{2}}$।

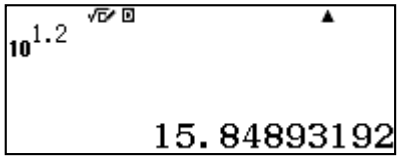
৭.২ লগারিদম

লগারিদমের ধারণা, সূচকের ধারণার সাথে জোড়ালোভাবে সম্পর্কিত। তারা কিভাবে সম্পর্কিত তা বোঝার জন্য 10 ভিত্তি সম্পন্ন একটি ফাংশন নেওয়া হলো-

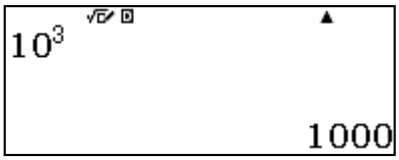
$$f(x) = 10^x$$

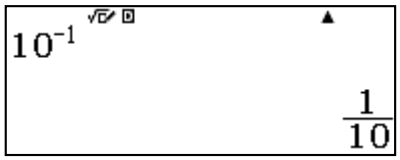
যদি সূচকের মান জানা থাকে, যেমন $x = 2.4$ তাহলে $\boxed{x^{\blacksquare}}$ বাটনের মাধ্যমে সহজেই এর মান বের করা যায়। প্রকৃতপক্ষে, দশভিত্তিক সূচক ফাংশনের জন্য একটি বিশেষ নির্দেশনা ($10^{\blacksquare}$) যা $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\log_{\blacksquare}\square}$ চেপে পাওয়া যায়। নিচের স্ক্রিনে দুইটি পদ্ধতিতে দেখানো হলো-





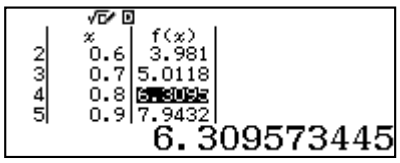
x এর কিছু পরিচিত পূর্ণমানের জন্য, ফাংশনের মান বের করতে ক্যালকুলেটরেরও প্রয়োজন হয় না। তবুও এগুলো নিচে দেখানো হলো-

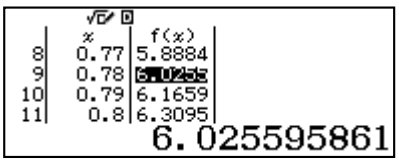


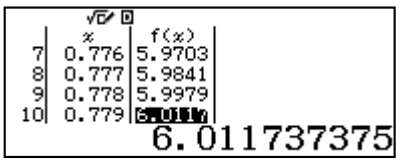


যে সকল সংখ্যা 10 এর ঘাতযুক্ত তাদের ক্ষেত্রে সূচক ও মানের মধ্যে যে সম্পর্ক তা বোঝা তুলনামূলকভাবে সহজ। কিন্তু 10 এর যে সূচকের জন্য একটি মান দেওয়া থাকে তা বের করা কিছুটা কঠিন। উদাহরণস্বরূপ ধরা যাক, $f(x) = 10^x = 6$ এ ক্ষেত্রে সূচকটি কত তা বের করতে হবে।

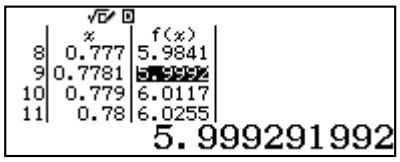
এই সমস্যা সমাধানের জন্য একটি পদ্ধতি হতে পারে মানের তালিকার ব্যবহার। নিচের স্ক্রিনগুলো ভালো করে পর্যবেক্ষণ করলে বোঝা যাবে যে, প্রতিটি স্ক্রিনের মানগুলো সমাধানের খুব কাছাকাছি।

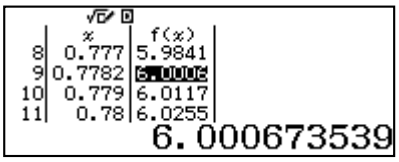


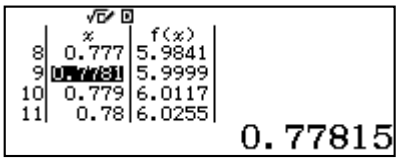




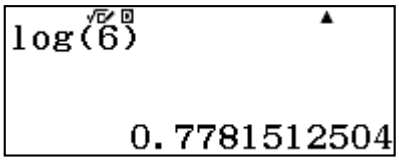
আপাতভাবে মনে হচ্ছে মানটি $x = 0.778$ ও $x = 0.779$ এর মধ্যে আছে। ফলাফলের সূক্ষ্মতা বাড়ানোর জন্য আরো তালিকা তৈরি করা যাবে। অন্যভাবে, মানের নতুন তালিকা তৈরিনা করে [=] বাটন চাপার মাধ্যমে x এর মান বার বার পরিবর্তন করতে হবে যতক্ষণ না $f(x)$ এর মান 6 এর কাছাকাছি হয়। নিচে কিছু পর্যায়ক্রমিক উদাহরণ দেওয়া হলো-

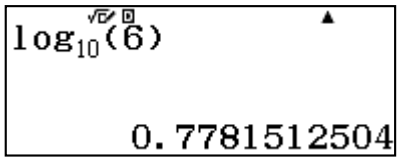






ক্যালকুলেটরের বাটন রয়েছে যার মাধ্যমে দক্ষতার সাথে এই ধরনের সমস্যার সমাধান করা যায়। এই সংখ্যা 6 এর দশভিত্তিক লগারিদমের মানকে নির্দেশ করে। নিচের স্ক্রিনে দেখা যাচ্ছে $log_{10} 6 = 0.77815$ যা পাঁচ দশমিক স্থান পর্যন্ত সঠিক। নিচের প্রথম স্ক্রিনের জন্য [SHIFT] [(–)] (log) কী ব্যবহার করা হয়েছে। দ্বিতীয় স্ক্রিনে লগারিদমের ভিত্তি প্রবেশ করানো হয়েছে, এক্ষেত্রে যেটি 10।

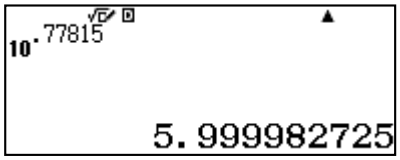


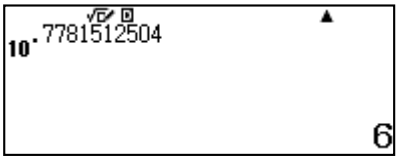


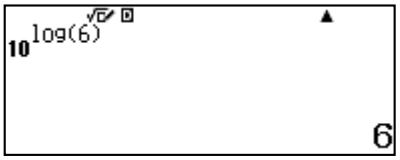
দশভিত্তিক লগারিদমে এতো ব্যাপকভাবে ব্যবহার করা হয় যে, ভিত্তির উল্লেখ না করেই শুধুমাত্র log হিসেবেই এটি পরিচিত। ক্যালকুলেটরেও একই পদ্ধতি ব্যবহার করা হয়েছে। উপরের প্রথম স্ক্রিনে [SHIFT] [(–)] ([log]) ব্যবহার করে দশভিত্তিক log সরাসরি প্রবেশ করানো হয়েছে।

কোনো সংখ্যার লগারিদম হলো ঐ সংখ্যাটি পাওয়ার জন্য দশের যে সূচক ব্যবহার করতে হবে তার মান। নিচের প্রথম স্ক্রিনে দেখা যাচ্ছে যে, উপরের মানের তালিকা হতে প্রাপ্ত $.77815$ মানটি $log6$ এর জন্য ভালো অনুমান। মাঝের স্ক্রিন

হতে দেখা যাচ্ছে যে, $log\ key$ ব্যবহার করে প্রাপ্ত মান $.7781512504, log6$ এর জন্য আরো ভালো অনুমান, যেখানে তৃতীয় স্ক্রিনটি $log6$ এর প্রকৃত অর্থ নির্দেশ করছে।







বর্তমানে গণনা করার জন্য লগসারণীর প্রয়োজন হয় না, বিশেষ করে যখন ক্যালকুলেটর থাকে। পূর্বে গণনা করার জন্য কীভাবে লগারিদম ব্যবহার করা হতো তা থেকে লগারিদমের বৈশিষ্ট্য সম্পর্কে পরিষ্কার ধারণা করা যায়।

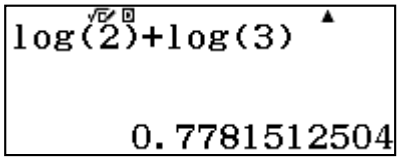
লগারিদমের বৈশিষ্ট্যগুলো, যা পূর্বে একে জনপ্রিয় করেছে, তা মূলত সূচক বিধি হতে নেওয়া হয়েছে। এটি নিচে ব্যাখ্যা করা হলো-

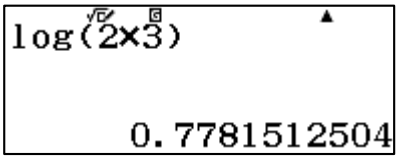
$$10^{3.1} \times 10^{1.2} = 10^{3.1+1.2} = 10^{4.3}$$

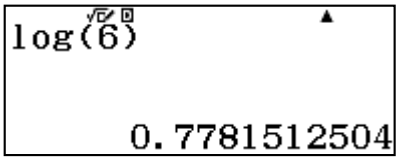
$$\text{এবং } (10^{1.2})^3 = 10^{1.2\times3} = 10^{3.6}$$

এই বিবরণ থেকে বলা যায়, যখন কোনো সংখ্যাকে 10 এর ঘাত হিসেবে লেখা হয়, তখন একে গুণ করার জন্য এদের ঘাতগুলোকে যোগ করতে হয়। আবার কোনো ঘাত বিশিষ্ট সংখ্যার অন্য কোনো ঘাত থাকলে এগুলোকে গুণ করতে হয়। ক্যালকুলেটর আসার পূর্বে বড় সংখ্যাকে উপস্থাপন করার জন্য লগারিদম ব্যবহার করা হতো, যার ফলে বিজ্ঞানী ও প্রকৌশলীসহ সকলের জন্য গণনা করা সহজ হয়েছিল।

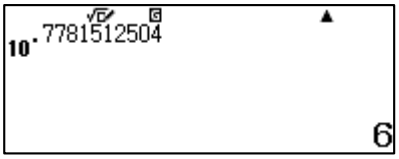
এই পদ্ধতির সহজ ব্যাখ্যার জন্য নিচের দুটি স্ক্রিন লক্ষ্য করি।





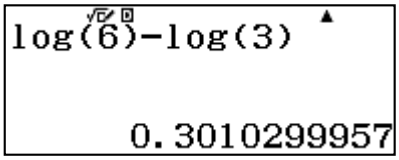


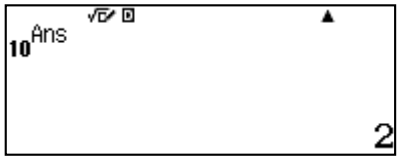
দেখা যাচ্ছে যে, $log2 + log3 = log6$ কেননা দুইটির মানই (≈ 0.778) এক। যদিও $3 \times 2 = 6$ একটি গুণ প্রক্রিয়ার সাথে সম্পর্কিত, কিন্তু যখন লগারিদম ব্যবহার করা হয় তখন শুধুমাত্র যোগ প্রক্রিয়ার প্রয়োজন পরে। ফলাফল হিসেবে 6 পাওয়ার জন্য প্রাপ্ত ফলকে (এক্ষেত্রে 0.778) লগারিদম থেকে সংখ্যায় রূপান্তর করার দক্ষতা থাকতে হবে, ফলাফলকে সূচক হিসেবে ব্যবহার করে ক্যালকুলেটর এটি করে থাকে। আবার কোনো ঘাতবিশিষ্ট সংখ্যার অন্য কোনো ঘাত থাকলে এগুলোকে গুণ করতে হয়।



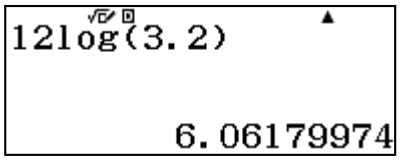
পূর্বে, এ বিপরীত পদ্ধতিটি ক্যালকুলেটরে নয় বরং লগসারণী ব্যবহার করে করা হতো।

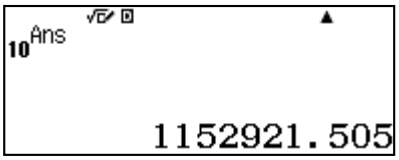
ভাগের ক্ষেত্রেও অনুরূপ ধারণা ব্যবহার করা হয়। $6 \div 3 = 2$ দেখানোর জন্য লগারিদমের অন্তরফল ব্যবহার করা হয়।

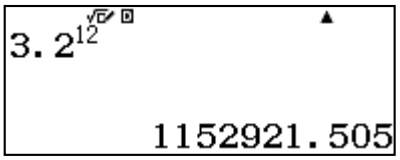




ঘাত এবং মূল খুঁজে বের করার জন্য গুণ এবং ভাগ ব্যবহারের প্রয়োজন পরতো এবং অন্যান্য পদ্ধতির চেয়ে লগারিদম ব্যবহার করা ছিল সুবিধাজনক। উদাহরণস্বরূপ, নিচের স্ক্রিনের মতো কোনো সংখ্যার 12 তম ঘাত বের করার জন্য সংখ্যাটির লগারিদমকে 12 দিয়ে গুণ করতে হয়। এরপর প্রাপ্ত ফলটিকে 10 এর সূচক হিসেবে ব্যবহার করলে ফলাফল পাওয়া যায় যা 3.2^{12} এর মান বের করার জন্য 3.2 কে 12 বার গুণ করার চেয়ে অনেক সহজ। অবশ্য, ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে সরাসরি এই মান চোখের পলকে বের করা যায়, যা নিচের তিন নাম্বার স্ক্রিনে দেখানো হয়েছে।

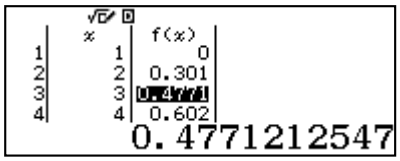


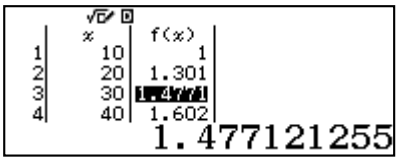


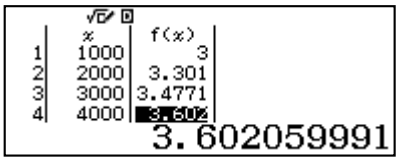


যেহেতু আমরা দশমিক সংখ্যা পদ্ধতি (যার ভিত্তি হলো 10) ব্যবহার করি, তাই দশভিত্তিক লগের ব্যবহার ছিলো সুবিধাজনক।

নিচের স্ক্রিনের তালিকাগুলোতে লগারিদমিক ফাংশন $f(x) = logx$ এর কিছু উদাহরণ দেখানো হলো-





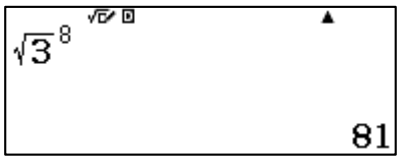


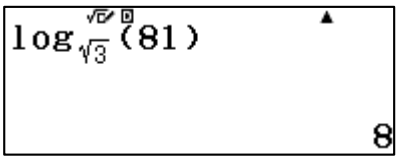
লক্ষণীয় যে, $log\,20 = Log10 + log2 = 1 + log2$ এবং $log2000 = log1000 + log2 = 3 + log2$ -এইভাবে বড় সংখ্যার লগারিদমের মান খুব সহজে ছোট সংখ্যার লগারিদমের মাধ্যমে বের করা যায়।

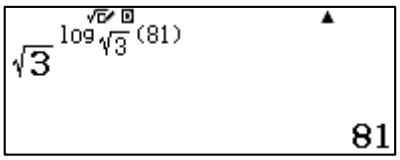
এটি করার জন্য 10 এর ঘাতের মান যোগ করা হয়। আর তাই লগ সারণীতে 1 থেকে 10 এর ভিতরের সংখ্যাগুলোর লগের মান তালিকাবদ্ধ থাকে।

৭.৪ অন্যান্য ভিত্তিযুক্ত লগারিদম

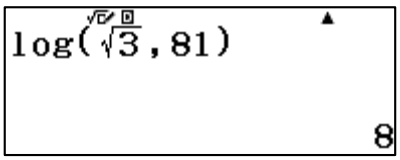
লগারিদমের ধারণা সূচক ফাংশনের সাথে সম্পর্কযুক্ত। এখন পর্যন্ত শুধু দশভিত্তিক সূচক ফাংশন আলোচনা করা হয়েছে। কিন্তু যেকোনো ধনাত্মক সংখ্যা ভিত্তি হতে পারে। যেমন বলা যায়, $\left(\sqrt{3}\right)^8 = 81$ । এটিকে বলা হয় 81 এর $\sqrt{3}$ ভিত্তিক লগ। অন্যভাবে $log_{\sqrt{3}}\,81 = 8$. ক্যালকুলেটরে যে কোনো ধনাত্মক ভিত্তিযুক্ত লগ এর মান [log▪□] কী ব্যবহার করে পাওয়া যায়। লগারিদমের ভিত্তি প্রবেশ করানোর পর [▶] বাটন চেপে প্রয়োজনীয় সংখ্যাটি প্রবেশ করিয়ে [=] বাটন চাপলে ফলাফল পাওয়া যাবে।

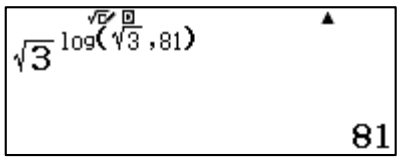






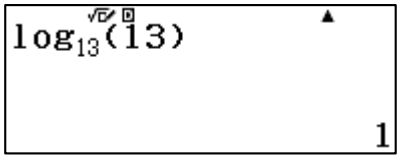
উপরের সর্বশেষ স্ক্রিন একটি নির্দিষ্ট ভিত্তিযুক্ত লগারিদম এবং ঐ একই ভিত্তিযুক্ত সূচকের সাথে সম্পর্ক নিদের্শ করে। যা 10 ভিত্তিযুক্ত ফাংশনের মতোই। [SHIFT] [(−)] ব্যবহার করে অন্যান্য ভিত্তিযুক্ত লগের মান বের করা যায়। এখন পর্যন্ত শুধুমাত্র দশভিত্তিক লগের জন্য এটি ব্যবহার করা হয়েছে, কিন্তু অন্যান্য ভিত্তিযুক্ত লগের জন্যেও এটি ব্যবহার করা যায়। সেজন্য ভিত্তির মান বসানোর পরে একটি কমা ([SHIFT] [)]) দিয়ে সংখ্যাটিকে লিখে এর মান বের করা যায় , নিচের প্রথম স্ক্রিনে $log_{\sqrt{3}}\,81$ এর মান বের করে দেখানো হলো।

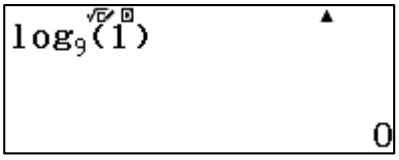


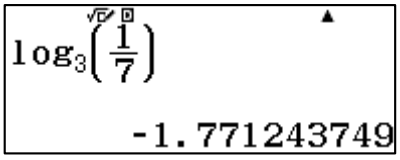


(কোনো ভিত্তি না দেওয়া থাকলে তা দশভিত্তিক ধরে নেওয়া হয়) উভয় পদ্ধতি একই ফলাফল দেয় তবে [log▪□] কী ব্যবহার করে মান প্রবেশ করানো অধিক দ্রুত হয়। আবার বিপরীত প্রক্রিয়া অনুসরণ করা হলে 81 ফিরে পাওয়া যায় যা উপরের দ্বিতীয় স্ক্রিনে দেখানো হয়েছে।

আরও লক্ষণীয় যে, কোনো ধনাত্মক ভিত্তির জন্য ঐ ভিত্তির লগের মান সবসময় 1 হবে । আবার 1 এর লগারিদমিক মান সবসময় শূন্য (যে কোনো সংখ্যার ঘাত শূন্য হলে মান হয় 1) এবং 1 এর চেয়ে ছোট যে কোনো সংখ্যার লগারিদমিক মান ঋণাত্মক । এখানে এ সকল বৈশিষ্ট্যের তিনটি উদাহরণ দেয়া হলো ।





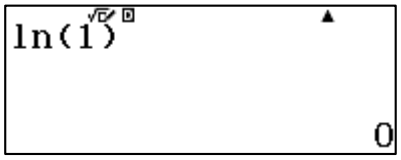


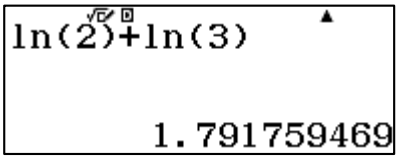
ঋণাত্মক সংখ্যার লগারিদম অথবা ঋণাত্মক ভিত্তিযুক্ত লগের মান পাওয়া যাবেনা কেননা শূন্য এবং তার থেকে ছোট সংখ্যার জন্য লগারিদম সজ্ঞায়িত নয় ।

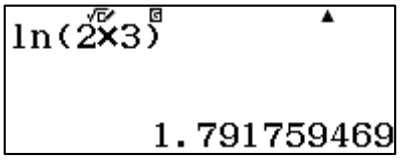
৭.৪ স্বাভাবিক লগারিদম (ln)

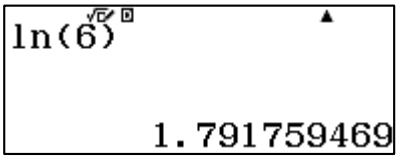
অনেক সূচকীয় ফাংশনের সাথে গাণিতিক ধ্রুবক e সম্পর্কিত । এই গুরুত্বপূর্ণ অমূলদ সংখ্যাটিকে নানাভাবে ব্যাখ্যা করা যায়। যেমন, n যদি অসীম হয় তাহলে নিম্নোক্ত ফাংশনের সীমাস্থ মান হবে e এর মান। গণিতের বিভিন্ন অংশে e ভিত্তিক লগারিদমের অনেক ব্যবহার রয়েছে । তাই [ln] কী এর মাধ্যমে এটি সরাসরি ক্যালকুলেটরে দেওয়া আছে । স্বাভাবিক লগারিদম বা e ভিত্তিক লগারিদমকে সংক্ষেপে ln বলা হয় ।

পূর্বে ব্যাখ্যাকৃত লগারিদমের অনেক বৈশিষ্ট্যের সাথে স্বাভাবিক লগারিদমের মিল রয়েছে । নিচে কিছু উদাহরণ দেখানো হলো -

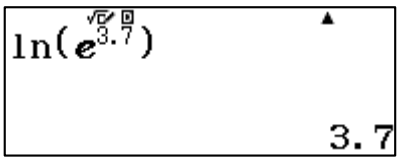


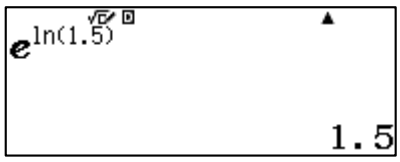




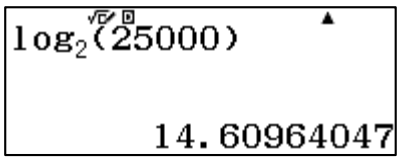


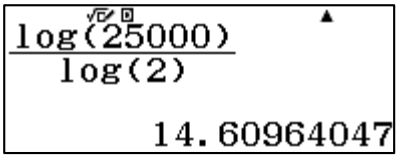
নিচের দুইটি স্ক্রিনে দেখা যায় যে, স্বাভাবিক লগারিদম ও সূচক ফাংশন একে অপরের বিপরীত ।

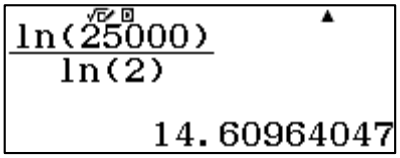




$log_2 25000$ এর মান অন্যান্য ভিত্তিযুক্ত লগারিদমের মতোই স্বাভাবিক ও সাধারণ লগারিদমের মাধ্যমেও বের করা যায়।

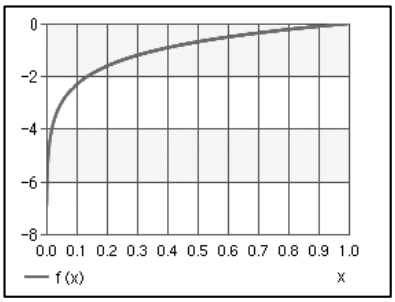




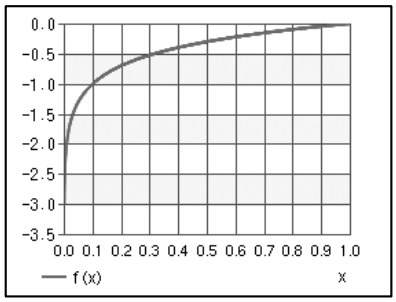


লক্ষণীয় যে, প্রত্যেকটি পদ্ধতিতেই একই ফলাফল পাওয়া যায়।

স্বাভাবিক ও সাধারণ লগারিদমের লেখচিত্র দেখতে একই রকম কিন্তু এদের ভুজ ও কোটি ভিন্ন, যা নিচে দেখানো হলো ।



$f(x) = \ln(x)$



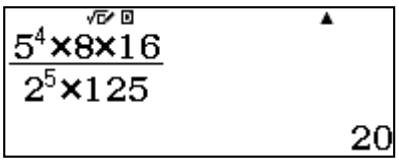
$f(x) = \log(x)$

এক্ষেত্রে দুটো লেখচিত্রই $(1,0)$ বিন্দুগামী , $x < 1$ এর জন্য উভয়ের মান ঋণাত্মক এবং $x < 0$ এর জন্য অসজ্ঞায়িত । উভয় লেখচিত্রে ধনাত্মক ঢাল রয়েছে, যা x এর মানের বৃদ্ধির সাথে সাথে কমতে থাকে ।

উদাহরণমালা

১ । $\frac{5^4 \times 8 \times 16}{2^5 \times 125}$ এর মান বের করতে হবে ।

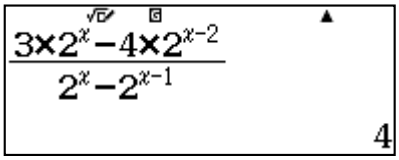
সমাধান- এই সমস্যা সমাধানের জন্য ক্যালকুলেটরে [$x^{\blacksquare}$] বাটন ব্যবহার করে রাশিটিকে প্রবেশ করাতে হবে । এরপর [=] বাটন চাপলে সরাসরি মান পাওয়া যাবে-

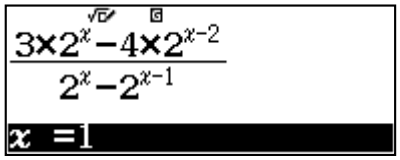


(Key log- [▭/▭] [5] [$x^{\blacksquare}$] [4] [▶] [×] [8] [×] [1] [6] [▼] [2] [$x^{\blacksquare}$] [5] [▶] [×] [1] [2] [5] [=])

২। $\frac{3.2^{n}-4.2^{n-2}}{2^{n}-2^{n-1}}$ এর মান বের করতে হবে ।

সমাধান- এখানে হরের কোনো মান জানা নেই । n কে x দ্বারা প্রতিস্থাপিত করে, এর একটি মান ধরে নিতে হবে । এরপর মানটি x এ সংরক্ষণ করতে হবে । রাশিটির অনুরূপ রাশি $\frac{3.2^{x}-4.2^{x-2}}{2^{x}-2^{x-1}}$ ক্যালকুলেটরে প্রবেশ করিয়ে [=] বাটন চাপলে রাশিটির মান বের হয়ে আসবে ।

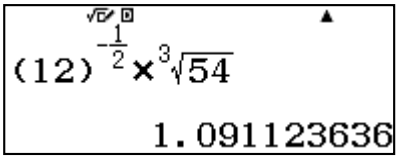




(keylog- [▭/▭] [3] [×] [2] [$x^{\blacksquare}$] [x] [▶] [−] [4] [×] [2] [$x^{\blacksquare}$] [x] [−] [2] [▶] [▶] [2] [$x^{\blacksquare}$] [x] [▶] [−] [2] [$x^{\blacksquare}$] [x] [−] [1] [=] [=])

৩। $(12)^{\frac{1}{2}} \times \sqrt[3]{54}$ এর মান বের করতে হবে ।

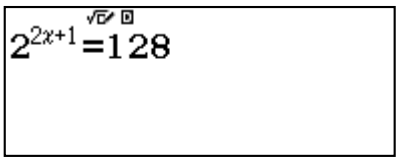
সমাধান- ক্যালকুলেটরে [$x^{\blacksquare}$] ও [SHIFT] [$\sqrt{\blacksquare}$] ব্যবহার করে রাশিটি ক্যালকুলেটরে প্রবেশ করিয়ে [=] বাটন চাপলে ফলাফল বের হয়ে আসবে ।

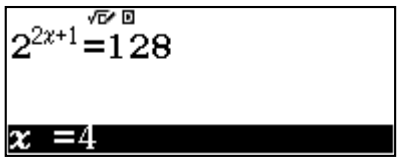


(Key log- [(] [1] [2] [)] [$x^{\blacksquare}$] [−] [▭/▭] [1] [▼] [2] [▶] [▶] [×] [SHIFT] [$\sqrt{\blacksquare}$] [5] [4] [=])

৪। $2^{2x+1} = 128$ সমীকরণটি হতে x এর মান বের করতে হবে ।

সমাধান- প্রথমে ক্যালকুলেটরটিকে Calculation *Mode*-এ আনতে হবে । এরপর [ALPHA] [CALC] (=) ব্যবহার করে সমীকরণটিকে নিচের স্ক্রিনের মতো ক্যালকুলেটরে প্রবেশ করাতে হবে । x এর অনুমিত মান হিসেবে 4 প্রবেশ করিয়ে [=] বাটন চাপলে x এর মান প্রকৃত মান স্ক্রিনের মতো প্রদর্শিত হবে ।

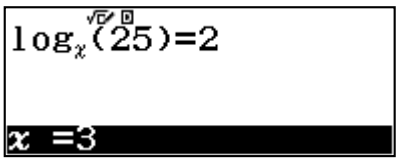


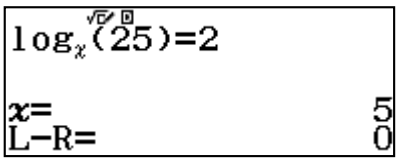


(Key log- [MENU] [1] [2] [$x^{\blacksquare}$] [2] [x] [+] [1] [▶] [ALPHA] [CALC] [1] [2] [8] [SHIFT] [CALC] [4] [=] [=])

৫। $log_{x}\, 25 = 2$ সমীকরণ হতে x এর মান বের করতে হবে ।

সমাধান- প্রথমে ক্যালকুলেটরটিকে Calulate *mode*-এ আনতে হবে । তারপর [$\log_{\blacksquare}\square$] বাটন চাপার পর প্রথমে ভিত্তি হিসেবে x প্রবেশ করানোর পরে 25 প্রবেশ করানো হলো । এরপর [ALPHA] [CALC] চেপে = প্রবেশ করিয়ে সমীকরণের ডান দিকের অংশ প্রবেশ করানো হলো । [SHIFT] [CALC] চাপার পর x এর অনুমিত মান হিসেবে 3 প্রবেশ করিয়ে [=] চাপলে ফলাফল স্ক্রিনে প্রদর্শিত হবে । এক্ষেত্রে $x = 5$.

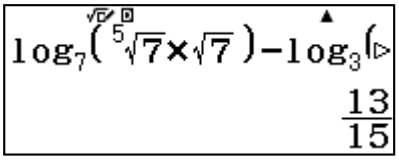




(Key log- MENU 1 log▪□ x ▶ 2 5 ▶ ALPHA CALC 2 SHIFT CALC 3 = =)

৬। $log_7\ (\sqrt[5]{7}.\sqrt{7}) - log_3\ \sqrt[3]{3} + log_4\ 2$ এর মান বের করতে হবে ।

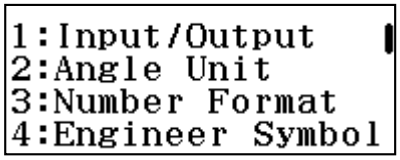
সমাধান- ক্যালকুলেটরটিকে Calulate *mode*-এ রেখে রাশিটি ক্যালকুলেটরে প্রবেশ করানোর পর = বাটন চাপলে নিচের স্ক্রিনের মতো ফলাফল প্রদর্শিত হবে ।

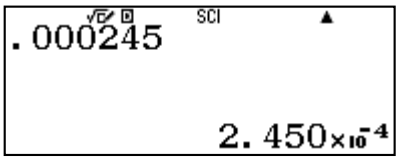


(Key log- MENU 1 log▪□ 7 ▶ SHIFT $x^{■}$ 5 ▶ 7 ▶ × √▪ 7 ▶ ▶ − log▪□ 3 ▶ SHIFT √▪ 3 ▶ ▶ + log▪□ 4 ▶ 2 =)

৭। 0.000245 কে বৈজ্ঞানিকরূপে প্রকাশ করতে হবে ।

সমাধান- প্রথমে ক্যালকুলেটরকে MENU 1 চেপে Calulate *mode*-এ আনতে হবে। এরপর বৈজ্ঞানিকরূপে ফলাফল পাওয়ার জন্য SHIFT MENU 3 চেপে number format নির্বাচন করতে হবে । এরপর 2 চেপে Sci *Mode* এ যেতে হবে। এরপর 0~9 এর মধ্যে দশমিকের পরে যত ঘর রাখতে হবে তা নির্দিষ্ট করতে হবে । এক্ষেত্রে 4 নেওয়া হয়েছে । এখন যে সংখ্যাটিকে বৈজ্ঞানিকরূপে প্রকাশ করতে হবে সেই সংখ্যাটিকে, এক্ষেত্রে 0.000245, প্রবেশ করিয়ে = বাটন চাপলে ক্যালকুলেটর সংখ্যাটিকে বৈজ্ঞানিকরূপে প্রকাশ করবে । উল্লেখ্য যে, Input/Output Method হিসেবে MethI/DecimalO নির্দিষ্ট করা থাকতে হবে ।

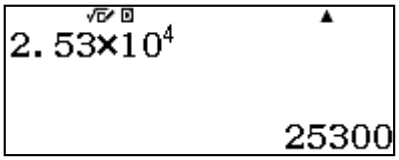




(Key log- MENU 1 SHIFT MENU 3 2 4 • 0 0 0 2 4 5 = S⇔D)

৮। 2.53×10^4 কে সাধারণ দশমিকে প্রকাশ করতে হবে ।

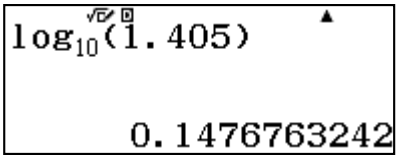
সমাধান- শুরুতে উপরের উদাহরণের মতো Number Format এ গিয়ে 3 চেপে Norm নির্বাচন করতে হবে । এরপর 2 চেপে $Norm$ 2 নির্বাচন করতে হবে । সংখ্যাটিকে প্রবেশ করিয়ে = বাটন চাপলে নিচের স্ক্রিনের মতো ফলাফল প্রদর্শিত হবে ।



(Key log- MENU 1 SHIFT MENU 3 3 2 2 • 5 3 × 1 0 $x^{■}$ 4 =)

৯। 1.405 সংখ্যাটির লগের পূর্ণক ও অংশক নির্ণয় করতে হবে ।

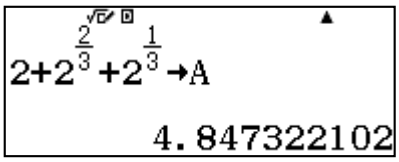
সমাধান- এজন্য প্রথমে [MENU] [1] চেপে Calulate *mode* –এ যেতে হবে । [log▪□] চেপে ভিত্তি হিসেবে 10 প্রবেশ করাতে হবে । এরপর সংখ্যাটিকে প্রবেশ করিয়ে [=] চাপলে ফলাফল প্রদর্শন করবে । প্রাপ্ত ফলাফলে দশমিকের আগের অংশ হচ্ছে পূর্ণক যা এক্ষেত্রে 0 এবং দশমিকের পরের অংশ অংশক যার মান এক্ষেত্রে .1476763242.

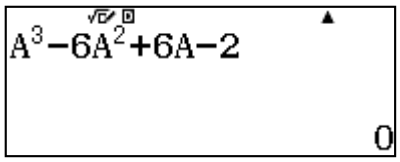


(Key log- [MENU] [1] [log▪□] [1] [0] [▶] [1] [•] [4] [0] [5] [=])

১০। $a = 2 + 2^{\frac{2}{3}} + 2^{\frac{1}{3}}$ হলে, $a^3 - 6a^2 + 6a - 2$ এর মান বের করতে হবে ।

সমাধান- প্রথমে [MENU] [1] চেপে Calulate *mode* এ আসতে হবে । এরপর [STO] চেপে A এর মান হিসেবে $2 + 2^{\frac{2}{3}} + 2^{\frac{1}{3}}$ সংরক্ষণ করতে হবে । এরপর $a^3 - 6a^2 + 6a - 2$ এর অনুরূপ রাশি $A^3 - 6A^2 + 6A - 2$ ক্যালকুলেটরে প্রবেশ করিয়ে [=] বাটন চাপলে স্ক্রিনের মতো ফলাফল প্রদর্শিত হবে ।

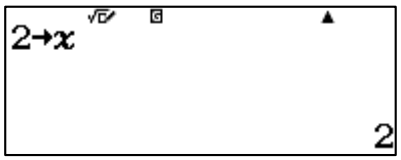


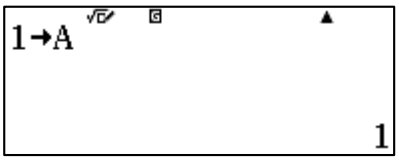


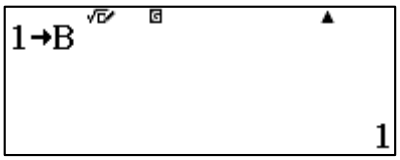
(keylog- [MENU] [1] [2] [+] [2] [$x^{■}$] [▭] [2] [▼] [3] [▶] [▶] [+] [2] [$x^{■}$] [▭] [1] [▼] [3] [STO] [(−)] [ALPHA] [(−)] [SHIFT] [x^2] [−] [6] [ALPHA] [(−)] [x^2] [+] [6] [ALPHA] [(−)] [−] [2] [=])

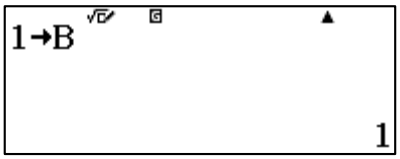
১১। $bc\sqrt{\frac{x^{b/c}}{x^{c/b}}} \times ca\sqrt{\frac{x^{c/a}}{x^{a/c}}} \times ab\sqrt{\frac{x^{a/b}}{x^{b/a}}}$ এর মান বের করতে হবে ।

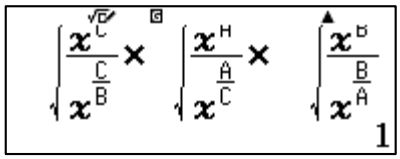
সমাধান- এই সমস্যাটিতে x, a, b, c কোনোটির মানই দেয়া নেই। এ ধরণের রাশির মান বের করার জন্য x, a, b, c এর মান ধরে নিতে হবে। তারপর এই মানগুলো ক্যালকুলেটরে সংরক্ষণ করে রাশিটি প্রবেশ করালে ফলাফল পাওয়া যাবে। এক্ষেত্রে $x = 2, a = 1, b = 1, c = 1$ মানগুলো ক্যালকুলেটরের x, A, B, C মেমোরিতে সংরক্ষণ করে নিচের স্ক্রিনের মতো করে রাশিটি প্রবেশ করালেই ফলাফল পাওয়া যাবে। এক্ষেত্রে যা 1।









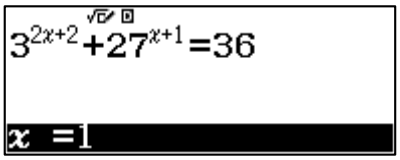


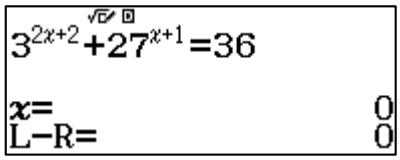
(Key log- [MENU] [1] [SHIFT] [$x^{■}$] [ALPHA] [°'''] [×] [ALPHA] [x^{-1}] [▶] [x] [$x^{■}$] [ALPHA] [°'''] [▭] [ALPHA] [x^{-1}] [▶] [▶] [▭] [x]

[x■] [ALPHA] [x⁻¹] [▭/▭] [ALPHA] [°'"] [▶] [▶] [▶] [▶] [×] [SHIFT] [x■] [ALPHA] [x⁻¹] [×] [ALPHA] [(−)] [▶] [x] [x■] [ALPHA] [x⁻¹] [▭/▭] [ALPHA] [(−)] [▶] [▶] [▭/▭] [x] [x■] [ALPHA] [(−)] [▭/▭] [ALPHA] [x⁻¹] [▶] [▶] [▶] [▶] [×] [SHIFT] [x■] [ALPHA] [(−)] [×] [ALPHA] [°'"] [▶] [x] [x■] [ALPHA] [(−)] [▭/▭] [ALPHA] [°'"] [▶] [▶] [▭/▭] [x] [x■] [ALPHA] [°'"] [▭/▭] [ALPHA] [(−)] [=])

১২। $3^{2x+2} + 27^{x+1} = 36$ সমীকরণ হতে x এর মান বের করতে হবে ।

সমাধান- ক্যালকুলেটরে Calulate *mode* নির্দিষ্ট করে সমীকরণটি প্রবেশ করানো হলো । x এর অনুমিত মান হিসেবে 1 প্রবেশ করিয়ে [=] বাটন চাপলে নিচের স্ক্রিনের মতো ফলাফল প্রদর্শিত হবে ।

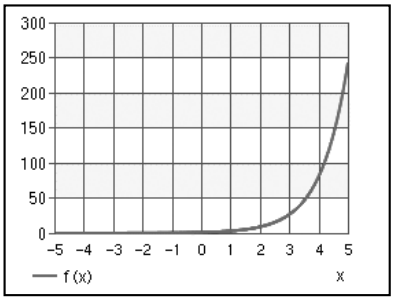




(Key log- [MENU] [1] [3] [x■] [2] [x] [+] [2] [▶] [+] [2] [7] [x■] [x] [+] [1] [▶] [ALPHA] [CALC] [3] [6] [SHIFT] [CALC] [1] [=] [=])

১৩। $y = 3^x$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করতে হবে।

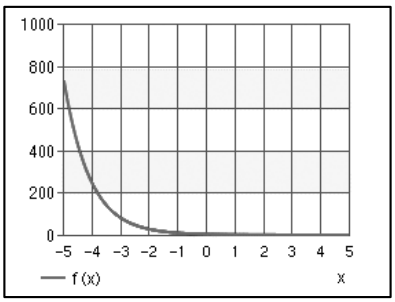
সমাধান- প্রথমে [MENU] [9] চেপে table menu নির্বাচন করতে হবে । এরপর $f(x) = 3^x$ প্রবেশ করিয়ে Start, End ও Step মান হিসেবে $-5, 5$ ও 1 প্রবেশ করিয়ে [=] বাটন চাপলে ক্যালকুলেটর মানের একটি তালিকা প্রদর্শন করবে । এরপর [SHIFT] [OPTN] চাপলে QR Code প্রদর্শন করবে । QR Code টি স্ক্যান করলে CASIO এর web page থেকে $y = 3^x$ এর লেখচিত্র প্রদর্শন করবে ।



(Key log- [MENU] [9] [3] [x■] [x] [=] [=] [−] [5] [=] [=] [SHIFT] [OPTN])
আবার প্রাপ্ত তালিকা থেকে x ও সংশ্লিষ্ট $f(x)$ এর মান ছক কাগজে বিন্দু হিসেবে স্থাপন করলে লেখচিত্রটি পাওয়া যাবে।

১৪। $y = 3^{-x+1}$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করতে হবে।

সমাধান- এর জন্য প্রথমে [MENU] [9] চেপে table menu নির্বাচন করতে হবে । এরপর $f(x) = 3^{-x+1}$ প্রবেশ করিয়ে Start, End ও Stop মান হিসেবে $-5{,}5$ *and* 1 প্রবেশ করিয়ে [=] বাটন চাপলে ক্যালকুলেটর মানের একটি তালিকা প্রদর্শন করবে । এরপর [SHIFT] [OPTN] চাপলে QR Code প্রদর্শন করবে । QR Code টি স্ক্যান করলে CASIO এর web page থেকে $y = 3^{-x+1}$ এর লেখচিত্র প্রদর্শন করবে ।



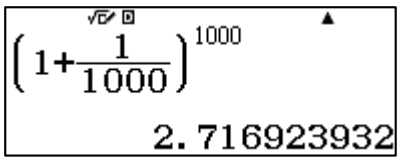
(Key log- [MENU] [9] [3] [$x^{■}$] [−] [x] [+] [1] [=] [=] [−] [5] [=] [5] [=] [1] [=] [=] [SHIFT] [OPTN])

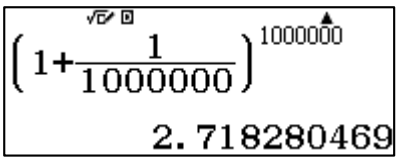
আবার প্রাপ্ত তালিকা থেকে x ও সংশ্লিষ্ট $f(x)$ এর মান ছক কাগজে বিন্দু হিসেবে স্থাপন করলে লেখচিত্রটি পাওয়া যাবে।

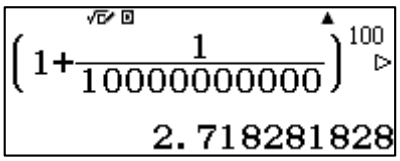
১৫। e এর মান বের করতে হবে, যখন

$$e = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

সমাধান- দেওয়া আছে, $e = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$। e এর মান বের করার জন্য n এর একটি মান বসিয়ে নিচের মতো করে ক্যালকুলেটরে প্রবেশ করিয়ে [=] চাপলে একটি মান পাওয়া যাবে। যা e এর মানের কাছাকাছি। নিচের তিনটি স্ক্রিন হতে দেখা যায় যে, n এর মান যত বড় হয়, সেটি ততো $e \approx 2.718281828459$ এর সঠিক মানের কাছাকাছি হয় ।



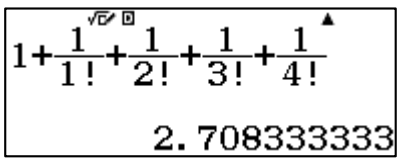


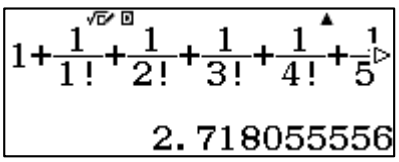


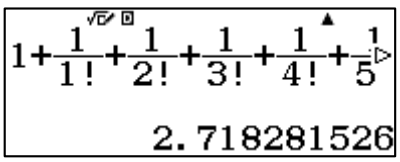
অসীম ধারার মাধ্যমেও e এর মান বের করা যায়-

$e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$ হতে

এই ধারার প্রথম কয়েকটি পদ ক্যালকুলেটরে নিয়ে e এর মান সম্পর্কে ধারণা পাওয়া যায়, যা নিচে দেখানো হয়েছে । ([SHIFT] [x^{-1}] চেপে ফ্যাক্টোরিয়াল $x!$ নির্দেশনা পাওয়া যায়।)



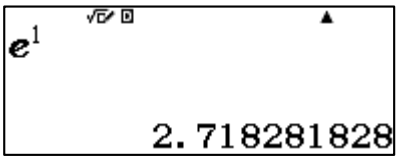




যদিও মানগুলো প্রায় একই রকম তবুও স্ক্রিনগুলোতে যথাক্রমে ধারার 4 টি, 6 টি ও 9 টি পদ নিয়ে মান বের করা হয়েছে । এগুলো হতে দেখা যায় যে, ধারাটি খুব দ্রুতই (অনেক বেশি পদের দরকার পড়ে না) e এর গ্রহণযোগ্য মানের কাছাকাছি যায় ।

পরবর্তী অধ্যায়ে আরো দক্ষতার সাথে ধারার মান খুব সহজে বের করার পদ্ধতি সম্পর্কে আলোচনা করা হয়েছে ।

e ধ্রুবকটির মান এত গুরুত্বপূর্ণ যে, $f(x) = e^x$ সূচক ফাংশনটির মান সরাসরি ক্যালকুলেটরের মাধ্যমে বের করা যায়। সেজন্য [SHIFT] [ln] ($e^{■}$) কী ব্যবহার করতে হয় । $x = 1$ এর জন্য e এর মান নিচের মতো করে প্রদর্শন করা হলো-



অনুশীলনী-৭

১। মান নির্ণয় কর- (ক) $\frac{5^2}{5^3}$ (খ) $\left(\frac{2}{3}\right)^5 \times \left(\frac{2}{5}\right)^{-5}$ (গ) $\frac{7^3 \times 7^{-3}}{3 \times 3^{-4}}$ (ঘ) $\frac{\sqrt[3]{7^2}.\sqrt[3]{7}}{\sqrt{7}}$

২। ক্যালকুলেটরের সাহায্যে বের কর-

(ক) $\frac{5^4 \times 8 \times 16}{2^5 \times 125}$ (খ) $\frac{3.2^n - 4.2^{n-2}}{2^n - 2^{n-1}}$ (গ) $7^{\frac{3}{4}} \cdot 7^{\frac{1}{2}}$

(ঘ) $(16)^{\frac{3}{4}} \div (16)^{\frac{1}{2}}$ (ঙ) $\left(10^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}$

৩। CALC বাটন ব্যবহার করে সমাধান বের কর-

(ক) $4^{x+1} = 32$ (খ) $4^x = 8$ (গ) $2^{2x+1} = 128$ (ঘ) $2^x + 2^{1-x} = 3$

৪। ক্যালকুলেটরের সাহায্যে মান নির্ণয় কর-

(ক) $\log_{10} 100$

(খ) $5 \log_{10} 5 - \log_{10} 25$

(গ) $\log_{10} 5 - \log_{10} 3 - 2 \log_{10} 7$

(ঘ) $\log_{10} \frac{10}{9} - 2 \log_{10} \frac{25}{24} + 30 \log_{10} \frac{81}{80}$

৫। x এর মান নির্ণয় কর-

(ক) $\log_{10} x = -2$

(খ) $\log_x 324 = 4$

৬। ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে বৈজ্ঞানিক পদ্ধতিতে প্রকাশ কর-

(ক) 5570 (খ) 45.70 (গ) 0.4305 (ঘ) 0.000435

(ঙ) 0.00000014 (চ) 37500000

৭। সাধারণ দশমিক রূপে প্রকাশ কর-

(ক) 10^5 (খ) 10^{-5} (গ) 2.53×10^4

(ঘ) 9.813×10^{-3} (ঙ) 3.12×10^{-5}

৮। 0.00836 এর লগের পূর্ণক ও অংশক কত?

৯। ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে $\log 43.517$ এর পূর্ণক ও অংশক বের কর।

অষ্টম অধ্যায়

অনুক্রম ও ধারা

(Sequence and Series)

অনুক্রম হলো ধারাবাহিক সংখ্যার তালিকা এবং কোনো অনুক্রমের পদগুলোর যোগফলই হলো ধারা। অনুক্রম ও ধারা গণিতের গুরুত্বপূর্ণ অংশ, সংখ্যার পুনরাবৃত্তির ধারণা থেকে যার উদ্ভব। এই অধ্যায়ে ClassWiz ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে নিম্নোক্ত বিষয়গুলো সম্পর্কে আলোচনা করা হবে-

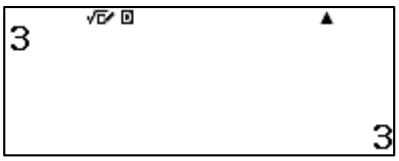
- পুনরাবৃত্তিমূলক যোগ
- পুনরাবৃত্তিমূলক গুণ
- সমান্তর ধারা
- গুণোত্তর ধারা এবং
- ধারার যোগফল নির্ণয়

এই অধ্যায়ে আলোচিত সমস্যাগুলোর সমাধানে ক্যালকুলেটরটিকে ইনপুট, আউটপুটের জন্য Math *mode* ও Norm 2 তে রাখতে হবে। এজন্য SETUP (SHIFT MENU) মেনুতে গিয়ে প্রয়োজন অনুযায়ী 1 অথবা 3 ব্যবহার করতে হবে।

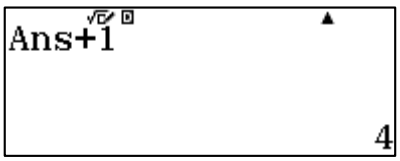
৮.১ পুনরাবৃত্তিমূলক ধারা

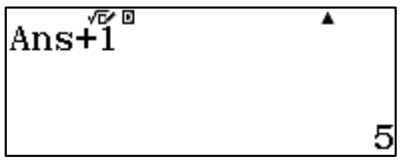
গণিতের মৌলিক ধারণার সাথে গণনা জড়িত। গণনা করার মূল ধারণা হচ্ছে একটি সংখ্যা থেকে পরের সংখ্যা পাওয়ার জন্য তার সাথে 1 যোগ করা হয়। এটি এক ধরনের পুনরাবৃত্তিমূলক ধারা। কীভাবে এটি কাজ করে তা ভালোভাবে অনুধাবন করার জন্য নিচের উদাহরণটি পর্যবেক্ষণ করতে হবে।

এজন্য প্রথমে Calculate *mode* নির্বাচন করে প্রথম সংখ্যাটি প্রবেশ করানোর পর = বাটন চাপতে হবে। নিচের উদাহরণ 3 থেকে শুরু করে গণনা করা হলো।

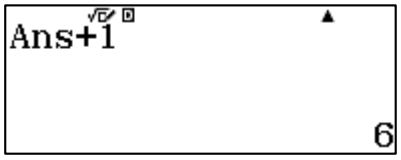


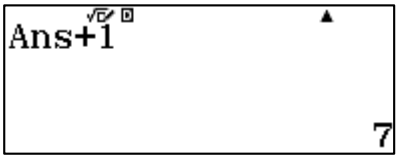
এরপর ক্যালকুলেটরে + 1 বাটন চেপে 1 যোগ করা যায়, = বাটন চাপার ফলে ক্যালকুলেটর পূর্বের সংখ্যার সাথে 1 যোগ করে ফলাফল প্রদর্শন করবে। আবার + কী চাপলে ক্যালকুলেটরের স্ক্রিনে Ans + প্রদর্শন করবে। এখানে Ans হলো পূর্বে প্রাপ্ত ফলাফল। অতঃপর 1 চাপার পর = চাপলে ক্যালকুলেটর $4 + 1 = 5$ প্রদর্শন করে।

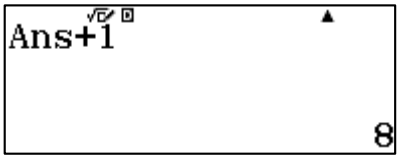




পুনরায় [=] বাটন চাপলে ক্যালকুলেটরে সর্বশেষ প্রক্রিয়াটি আবার সম্পাদন করবে। এক্ষেত্রে ফলাফল হবে $5 + 1 = 6$. এরপর যতবার [=] বাটন চাপা হবে ততবারই এই প্রক্রিয়াটির পুনরাবৃত্তি হতে থাকবে। নিচের তিনটি স্ক্রিন পরপর তিনবার [=] বাটন চাপার মাধ্যমে পাওয়া গেছে।

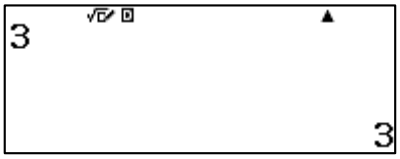


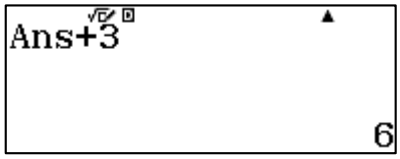




উপরের বর্ণনাকৃত পদ্ধতি অন্যান্য পুনরাবৃত্তিমূলক গণনার ক্ষেত্রেও ব্যবহার করা যায়। যেকোনো সংখ্যা থেকে শুরু করে যেকোনো রকম পুনরাবৃত্তিমূলক গণনার ক্ষেত্রে এটি ব্যবহার করা যায়।

উদাহরণস্বরূপ, 3 থেকে শুরু করে প্রতিবার 3 যোগ হবে। এভাবে যতবার ইচ্ছা যোগ করা সম্ভব।

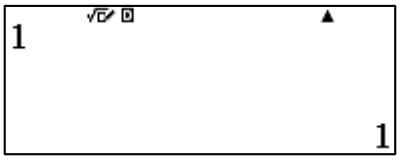


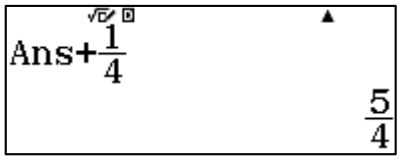


পূর্ণসংখ্যা ছাড়া ভগ্নাংশের জন্যও এই পদ্ধতি প্রয়োগ করা যায়। যেমন,

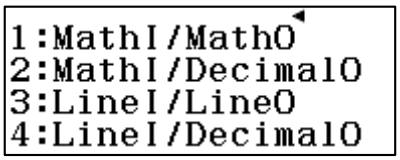
$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

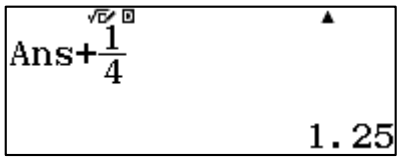
ক্যালকুলেটরের মাধ্যমে যোগফল বের করা নিচে দেখানো হলো-



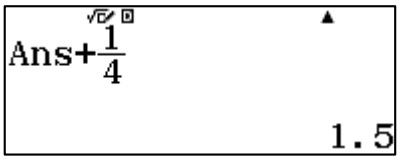


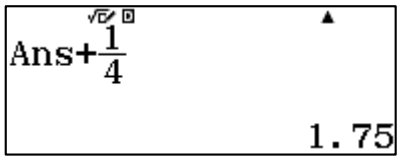
এভাবে ক্যালকুলেটর প্রতিবার ফলাফল ভগ্নাংশ আকারে প্রদর্শন করবে। দশমিক সংখ্যায় ফলাফল পাওয়ার জন্য [SHIFT] [=] চাপতে হবে। বারবার [SHIFT] [=] চাপার ঝামেলা এড়ানোর জন্য SET UP menu তে গিয়ে Input/ output থেকে Math I/ DecimalO নির্বাচন করতে হবে, যা নিচের স্ক্রিনে দেখানো হলো।





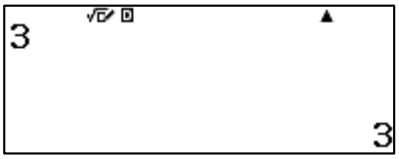
এরপর .25 থেকে শুরু করে .15 করে বৃদ্ধির জন্য উপরের পদ্ধতি অনুসরণ করার পর শুধুমাত্র [=] বাটন চাপতে থাকলে প্রতিবার দশমিক সংখ্যায় ফলাফল প্রদর্শন করবে। (এভাবে জটিল সংখ্যারও পুনরাবৃত্তিমূলক যোগ করা সম্ভব।)



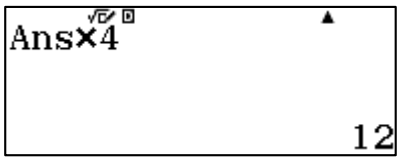


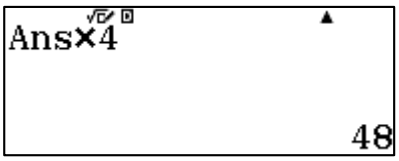
৮.২ পুনরাবৃত্তিমূলক গুণ

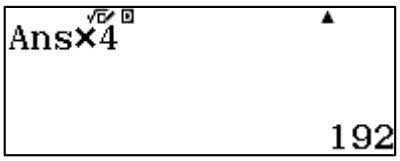
যোগের ক্ষেত্রে পুনরাবৃত্তিমূলক পদ্ধতি ব্যবহার করে বিভিন্ন রকম গণনা সম্ভব, যা পূর্বে দেখানো হয়েছে। গুণ সহ অন্যান্য প্রক্রিয়ার জন্যও পুনরাবৃত্তিমূলক পদ্ধতি ব্যবহার করা যায়। গুণ প্রক্রিয়ার পুনরাবৃত্তি করতে থাকলে ফলাফলের সূচকীয় (Exponential) বৃদ্ধি খুব দ্রুত ঘটে, যার গণিতে অনেক ব্যবহার রয়েছে। উদহারণ হিসেবে ক্যালকুলেটরে 3 থেকে শুরু করা হলো।



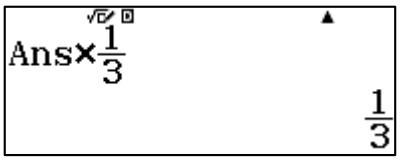
এরপর 4 দ্বারা গুণের পুনরাবৃত্তিমূলক পদ্ধতি সূচনা করা হলো। প্রতিবার [=] চাপার সাথে সাথে ক্যালকুলেটর পূর্বের ফলাফলের সাথে 4 গুণ করে ফলাফল প্রদর্শন করবে।







1 থেকে শুরু করে $\frac{1}{3}$ দ্বারা পুনরাবৃত্তিমূলক গুণ করতে থাকা হয় তাহলে প্রাপ্ত ফলাফল গুলো হবে 3 এর ঋণাত্মক ঘাতের মান যা নিচের স্ক্রিনে দেখানো হলো-



৮.৩ অনুক্রম

কতগুলো রাশিকে একটি বিশেষ নিয়মে তার পূর্বপদ ও পরপদের সাথে সম্পর্কিত করে সাজালে রাশিগুলোর যে সেট পাওয়া যাবে তাকে অনুক্রম বলে। গণিতে অনুক্রম গঠনের জন্য একটি নির্দিষ্ট নিয়ম অনুসরণ করতে হয়। সাধারণত ক্রমানুযায়ী প্রত্যেকটি পদের পরে ‘,’ দিয়ে অনুক্রম প্রকাশ করা হয়। উদাহরণস্বরূপ,

$$3, 6, 9, 12, \dots \dots \dots \dots \dots \text{একটি অনুক্রম}$$

এবং 3 এর ঘাতের একটি অনুক্রম হলো-

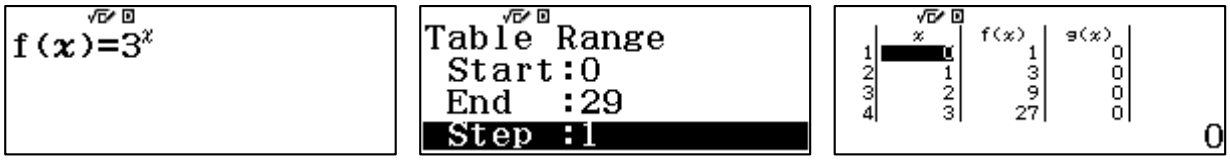
$$1, 3, 9, 27, \dots \dots \dots \dots (3^0,\ 3^1, 3^2 \dots \dots \dots \dots ..)$$

আবার অনুক্রমকে সাধারণ পদের সাহায্যে প্রকাশ করা যায়। উপরে বর্ণনাকৃত প্রথম উদহারণের $3, 4, 5, \dots . \dots ..$ সাধারণ পদ হলে $T_n = 2 + n$ যেখানে n স্বাভাবিক সংখ্যা।

3 এর ঘাত বিশিষ্ট অনুক্রমকে সাধারণ পদের সাহায্যে লেখা যায়-

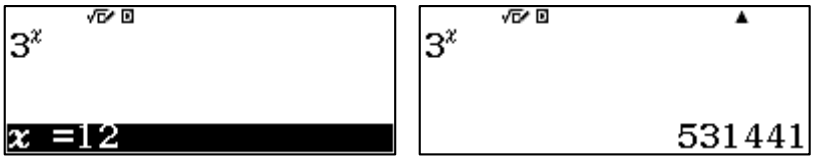
$$T_n = 3^n, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \dots \dots$$

বার বার যোগ বা গুণ করার চাইতে একটি নির্দিষ্ট পদের মান বের করার জন্য অনুক্রমকে সাধারণ পদের সাহায্যে লিখে, ফাংশন হিসেবে বিবেচনা করে মানের তালিকার মাধ্যমে বের করা অধিক সহজ। এজন্য ক্যালকুলেটরকে Table *mode* এ নিতে হবে। অনুক্রমটিকে নিচের মতো করে টাইপ করতে হবে-

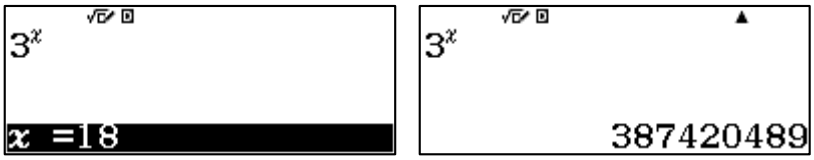


এখানে n এর পরিবর্তে x ব্যবহার করা হয়েছে। যেহেতু Table *mode* এ 30 টি মান পাওয়া যায় তাই $Start, End$ ও $step$ মান হিসেবে $0, 29$ ও 1 নেওয়া হয়েছে। ক্যালকুলেটরে ▲ ও ▼ বাটনের মাধ্যমে উপরে নিচে গেলে উক্ত ব্যবধির মধ্যে যেকোনো পদের মান পাওয়া যাবে। অনুক্রমের অন্যান্য পদের মান বের করতে ব্যবধি পরিবর্তন করতে হবে।

$T_n = 3^n$ অনুক্রমটির যেকোনো পদের মান Table *mode* ছাড়াও সরাসরি বের করা যায়। এজন্য ক্যালকুলেটর 3^x সরাসরি টাইপ করে CALC বাটন চাপলে ক্যালকুলেটর x এর মান চাইবে। এরপর যে পদের মান বের করতে হবে সেটি প্রবেশ করিয়ে = বাটন চাপলে ঐ পদটির মান সরাসরি পাওয়া যাবে।



অন্য কোনো পদের মান বের করতে হলে পুনরায় CALC বাটন চেপে কাঙ্খিত পদের মানটি প্রবেশ করাতে হবে। এরপর আবার = বাটন চাপলে ফলাফল পাওয়া যাবে।



উপরের স্ক্রিনে 3^n এর 12 ও 18 তম পদের মান দেখানো হয়েছে।

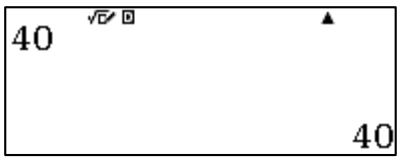
৮.৪ সমান্তর ধারা

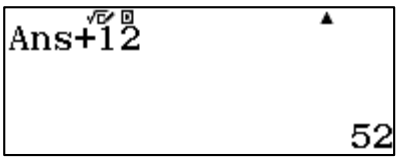
গণিতে সমান্তর ধারা অনেক গুরুত্বপূর্ণ। কোনো ধারাতে যেকোনো পদ ও তার পূর্ববর্তী পদের পার্থক্য সব সময় সমান হলে সেই ধারাকে সমান্তর ধারা বলে। এই ধারার প্রত্যেকটি পদ পূর্ববর্তী পদের সাথে একটি ধ্রুব সংখ্যা যোগ করার মাধ্যমে পাওয়া যায়।

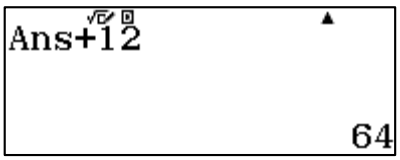
বাংলাদেশে সিএনজি মিটারের ভাড়া এর একটি ভালো উদাহরণ হতে পারে। প্রতিবার ভ্রমনের জন্য ন্যূনতম ভাড়া (40 টাকা) নির্দিষ্ট থাকে। এরপর প্রতি কিলোমিটারে ভ্রমণের জন্য একটি নির্দিষ্ট পরিমাণ ভাড়া (12 টাকা) দিতে হয়। ধরা যাক, $a = 40$ এবং $d = 12$, যেখানে a হলো প্রথম পদ ও d হলো সাধারণ অন্তর। বিভিন্ন দূরত্বে ভ্রমণের জন্য ভাড়ার অনুক্রমটি হলো একটি সমান্তর অনুক্রম-

$$40, 52, 64, 76 \ldots \ldots \ldots \ldots$$

এটি ক্যালকুলেটরে সরাসরি বের করা যায় অথবা সূত্রের মাধ্যমেও করা যায়। নিচের স্ক্রিনে সরাসরি বের করে দেখানো হলো যেখানে 1 কিলোমিটার ভ্রমণের পর ভাড়া হলো 52 টাকা, যা অনুক্রমটির দ্বিতীয় পদ।



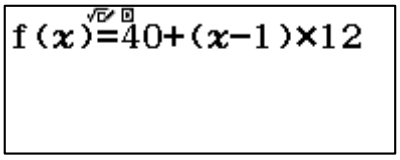


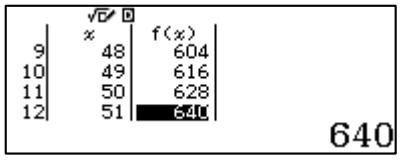


এভাবে যথাযত সংখ্যকবার [=] বাটন চাপার মাধ্যমে যেকোনো দূরত্বের সিএনজি ভাড়া বের করা সম্ভব।

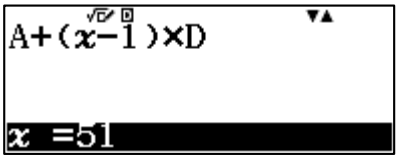
যদিও ছোট দূরত্বের ভাড়া বের করার জন্য এই পদ্ধতি গ্রহণযোগ্য কিন্তু দীর্ঘ দূরত্ব (ধরা যাক, 50 কিলোমিটার) ভাড়া বের করার জন্য এই পদ্ধতিটি অসুবিধাজনক। সুতরাং, সূত্রের সাহায্যে এটি বের করা সহজ। সমান্তর ধারার n তম পদটি হলো $T_n = a + (n-1)d$.

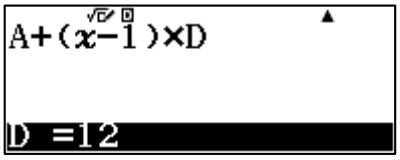
মানের তালিকা ব্যবহার করে যেকোনো পদের মান বের করা সম্ভব। দ্বিতীয় স্ক্রিনে দেখা যাচ্ছে যে 50 কিলোমিটার ভ্রমণের জন্য ভাড়া হলো 640 টাকা। লক্ষণীয়যে, 50 কিলোমিটার ভ্রমণের ভাড়া বের করার জন্য 51 তম পদের মানটি বের করতে হবে। কারণ প্রথম পদটি হলো 0 কিলোমিটার ভ্রমণের জন্য।

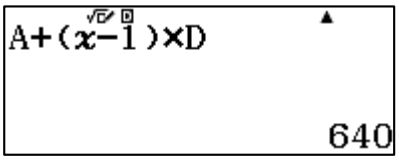




$CALC$ সুবিধার মাধ্যমে যেকোনো পদের মান সরাসরি বের করা যায়। এজন্য প্রথমে $a + (n-1)d$ পদটির অনুরূপ পদ $A + (x-1)D$ আকারে ক্যালকুলেটরে প্রবেশ করানো হলো। এরপর [CALC] বাটন চেপে A এর মান $40, x$ এর মান 51 ও D এর মান 12 প্রবেশ করানো হলে ফলাফল 640 পাওয়া যাবে যা নিচের স্ক্রিনে দেখানো হয়েছে। লক্ষণীয় যে, প্রতিটি মান প্রবেশ করানোর পর [=] বাটন চাপতে হবে।





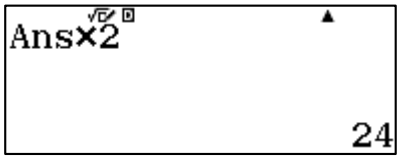


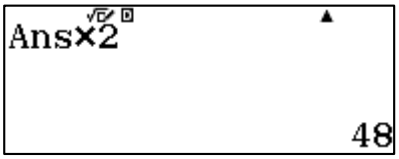
অন্যান্য দূরত্বের ভ্রমণের ভাড়া বের করার জন্য পুনরায় [=] চেপে শুধুমাত্র x-এর মান পরিবর্তন করলেই হবে।

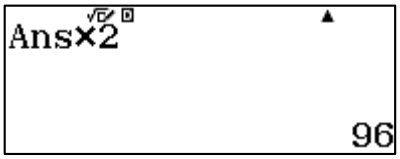
৮.৫ গুণোত্তর ধারা

গণিতে গুণোত্তর ধারার বিভিন্ন রকম প্রয়োগ রয়েছে। এই কারণে এটি অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ। কোনো ধারার যেকোনো পদ ও এর পূর্ববর্তী পদের অনুপাত সবসময় সমান হলে অর্থাৎ যেকোনো পদকে এর পূর্ববর্তী পদ দ্বারা ভাগ করে ভাগফল সর্বদা সমান পাওয়া গেলে সে ধারাটিকে গুণোত্তর ধারা বলে এবং ভাগফলকে সাধারণ অনুপাত বলে। সাধারণত গুণোত্তর ধারার প্রথম পদকে a এবং সাধারণ অনুপাতকে r দ্বারা চিহ্নিত করা হয়। অর্থাৎ প্রত্যেকটি পদ তার পূর্বপদের সাথে r দ্বারা গুণ করলে পাওয়া যায়।

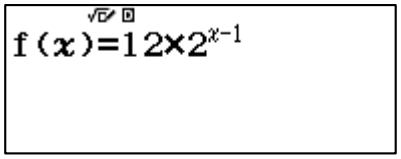
ধরা যাক, একটি গুণোত্তর ধারা $12, 24, 48, \ldots\ldots\ldots\ldots$ ধারাটির প্রথম পদ $a = 12$ এবং সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{24}{12} = 2$. এই গুণোত্তর ধারাটির যেকোনো পদের মানও উপরের তিনটি পদ্ধতিতে বের করা যায় প্রথম পদ্ধতি অনুযায়ী সরাসরি নিচের মতো করে বের করা যায়।

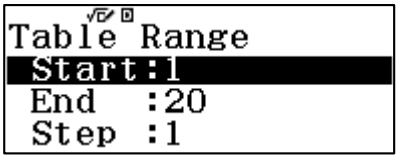


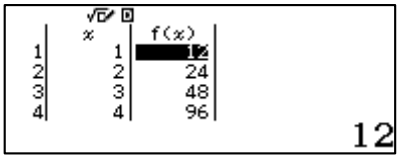




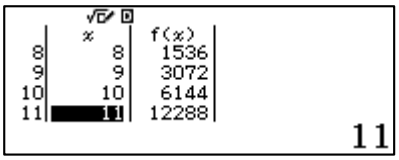
সূত্রের সাহায্যে nতম পদের মান বের করার জন্য $T_n = ar^{n-1}$ ব্যবহার করা হয়। কিভাবে Table *mode* এর মাধ্যমে এই ধারাটির মান বের করতে হবে তা নিচের স্ক্রিনে দেখানো হলো-



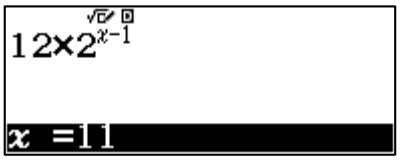


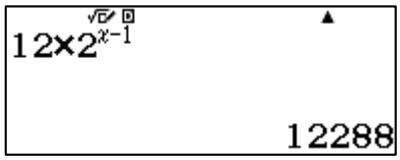


দ্বিতীয় স্ক্রিনে ধারার বিভিন্ন পদের মান দেখা যাচ্ছে। এভাবে Table *mode* এর মাধ্যমে একটি নির্দিষ্ট মান কত তম পদে পাওয়া যাবে সেটিও সহজে বের করা সম্ভব। উপরের ধারাটিতে কততম পদের মান 12288 তা বের করার জন্য শুধুমাত্র ▲ ও ▼ কী ব্যবহার করতে হবে। এখানে দেখা যাচ্ছে 11 তম পদের মান 12288.



$CALC$ সুবিধার মাধ্যমেও গুণোত্তর ধারার যেকোনো পদের মান পূর্বের মতো করে বের করা যায় যা নিচে দেখানো হলো।





৮.৬ ধারার যোগফল

কোনো অনুক্রমের ধারাবাহিক পদগুলোর যোগফলই হলো ধারা। একটি জনপ্রিয় উদাহরণ হলো প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার যোগফল।

$$1 + 2 = 3$$

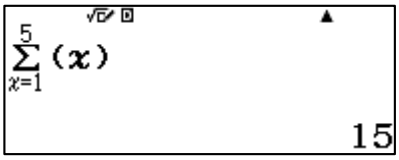
$$1 + 2 + 3 = 6$$

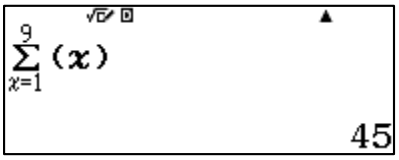
$$1 + 2 + 3 + 4 = 10 \text{ ইত্যাদি}$$

এসব সংখ্যার প্রতিটিই হলো অনুক্রমের পদগুলোর যোগফল, যেখানে $T_x = x$ গণিতে এই ধরনের যোগফল নিচের মতো করে প্রকাশ করা হয়-

$$\sum_{x=1}^{n} x$$

গ্রিক বর্ণ ′Σ′ হলো ইংরেজী বর্ণ S-এর সমতুল্য, আর এই S এসেছে ‘Sum’ বা যোগফল থেকে। Σ এর নিচের ও উপরের সীমার মান, যে সংখ্যাগুলো যোগ করতে হবে তার প্রথম ও শেষ মান নির্দেশ করে। এক্ষেত্রে সাধারণ পদটি হলো x যা স্বাভাবিক সংখ্যার অনুক্রমকে নির্দেশ করে। [Σ=] কী ([SHIFT] [x]) ব্যবহার করে ক্যালকুলেটরে ধারার যোগফল পাওয়া যায়। কিন্তু সেজন্য সাধারণ পদটি জানা থাকতে হবে। অনুক্রমের সাধারণ পদটির জন্য অবশ্যই x ([x]) ব্যবহার করতে হবে। সীমার মানগুলো প্রবেশ করানোর সময় এক স্থান থেকে আরেক স্থানে যাওয়ার জন্য ◀ ▶ ব্যবহার করতে হবে।



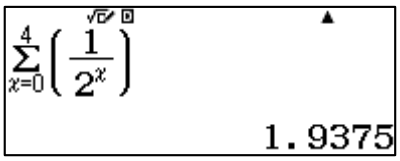


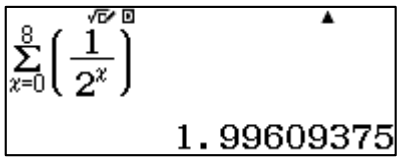
উপরের স্ক্রিনে প্রথম 5 টি এবং প্রথম 9 টি স্বাভাবিক সংখ্যার যোগফল দেখানো হয়েছে। দ্বিতীয় রাশিটি পাওয়ার জন্য প্রথম থেকে শুরু করার চেয়ে ◀ কী ব্যবহার করে সম্পাদনা করা অধিক সুবিধাজনক।

অনেক ধারার অসীম সংখ্যক পদ বিদ্যমান যা ক্যালকুলেটরে সম্পূর্ণরূপে উপস্থাপন করা সম্ভব নয়। কিন্তু অনেকগুলো পদ যোগ করার মাধ্যমে ভালো ধারণা পাওয়া সম্ভব। উদাহরণস্বরূপ, একটি অসীম গুণোত্তর ধারা-

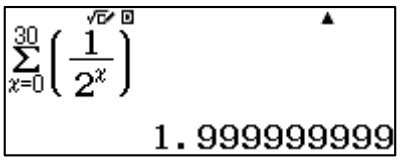
$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\frac{1}{2^n}+\cdots\ldots..=\sum_{0}^{n}\frac{1}{2^n}$$

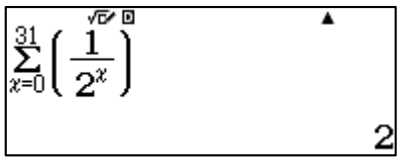
এই ধারার পদগুলো ধারাবাহিকভাবে যোগ করতে থাকলে ফলাফল নিচের স্ক্রিনের মতো 2 এর কাছাকাছি হবে-



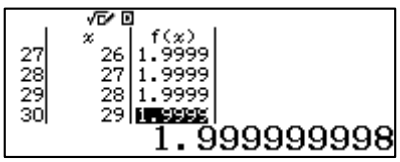


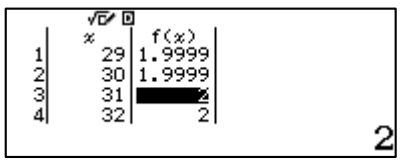
যদিও যোগফল কখনো 2 হবে না কিন্তু 32 টি পদের পরে ক্যালকুলেটর নিচের মতো ফলাফল প্রদর্শন করবে।





যেহেতু ধারাটির সাধারণ পদ জানা আছে তাই এটি নিচের Table-এর মাধ্যমেও পর্যবেক্ষণ করা সম্ভব।

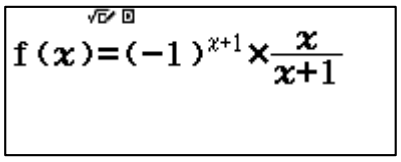


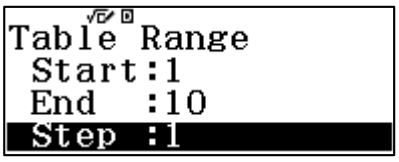


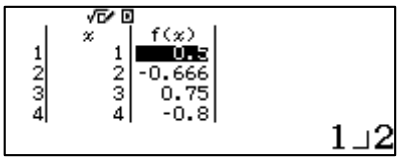
উদাহরণমালা

১. $(-1)^{n+1}\frac{n}{n+1}$ অনুক্রমটি লিখতে হবে।

সমাধান- প্রথমে ক্যালকুলেটরকে Table *mode*-এ নিয়ে $f(x)$ এ $(-1)^{n+1}\frac{n}{n+1}$ এর অনুরূপ অনুক্রম $(-1)^{x+1}\frac{x}{x+1}$ প্রবেশ করাতে হবে। এরপর $Start, End$ ও $step$ হিসেবে $1, 10$ ও 1 নিলে একটি মানের তালিকা পাওয়া যাবে।







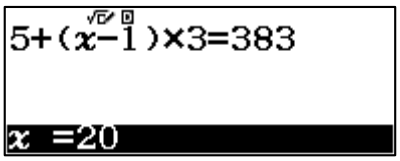
(Key log- [MENU] [9] [(] [−] [1] [)] [$x^{\blacksquare}$] [x] [+] [1] [▶] [×] [▭] [x] [▶] [x] [+] [1] [=] [=] [1] [=] [1] [0] [=] [1] [=] [=])

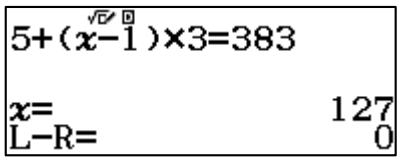
$f(x)$ এর মানগুলো হবে অনুক্রমটির পদ। ক্যালকুলেটর হতে দেখা যাচ্ছে অনুক্রমটির পদগুলো হলো

$$\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

২. $5 + 8 + 11 + 14 + \cdots \dots\dots\dots\dots..$ ধারাটির কোনো পদ 383 তা বের করতে হবে।

সমাধান- এখানে ধারাটির প্রথম পদ $a = 5$ এবং সাধারণ অন্তর $d = 8 - 5 = 3$ সুতরাং ধারাটির x তম পদ হবে $5 + (x - 1) \times 3$. ক্যালকুলেটরে $5 + (x - 1) \times 3 = 383$ টাইপ করে [SHIFT] [CALC] $(Solve)$ চাপলে x এর একটি মান চাইবে। x এর মান 20 প্রবেশ করিয়ে [=] চাপলে নিচের স্ক্রিনের মতো ফলাফল প্রদর্শিত হবে।

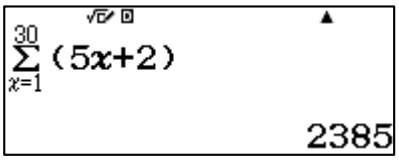




(Key log- [MENU] [1] [5] [+] [(] [x] [−] [1] [)] [×] [3] [ALPHA] [CALC] [3] [8] [3] [SHIFT] [CALC] [2] [0] [=] [=])

৩. $7 + 12 + 17 + \dots\dots\dots$ ধারাটির 30টি পদের সমষ্টি বের করতে হবে।

সমাধান- ধারাটির সাধারণ পদ $(5x + 2)$. [SHIFT] [x] ([Σ-]) চেপে $'\Sigma'$ প্রবেশ করানোর পর সাধারণ পদ হিসেবে $5x + 2$ এবং শুরুর মান 0 ও শেষ মান 30 প্রবেশ করাতে হবে। এরপর [=] চাপলে নিচের স্ক্রিনের মতো ফলাফল প্রদর্শিত হবে।



(Key log- [SHIFT] [x] [AC] [SHIFT] [x] [5] [x] [+] [2] [▶] [1] [▶] [3] [0] [=])

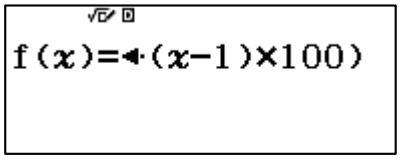
৪. ‘ক’ তার বেতন থেকে প্রথম মাসে 1200 টাকা সঞ্চয় করেন এবং পরবর্তী মাসগুলোর প্রতিমাসে এর পূর্ববর্তী মাসের তুলনায় 100 টাকা বেশি সঞ্চয় করেন। এক বছরে তিনি কত টাকা সঞ্চয় করেন তা বের করতে হবে।

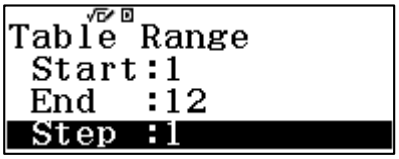
সমাধান- উক্ত সমস্যাটিকে ধারায় প্রকাশ করলে পাওয়া যায়,

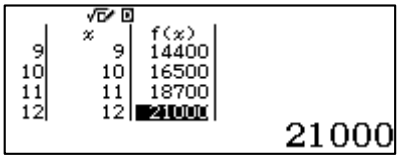
$$1200 + 1300 + \ \ldots\ldots\ldots..$$

সুতরাং ধারার প্রথম পদ, $a = 1200$ এবং সাধারণ অন্তর $d = 1300 - 1200 = 100$. এরপর Table *mode* এ গিয়ে $f(x)$ এ $\sum_{x=1}^{x}(1200 + (x-1) \times 100)$ প্রবেশ করাতে হবে।

লক্ষণীয়যে, ‘ Σ ’ এর উপরে সর্বোচ্চ মান হিসেবে x নিতে হবে। এরপর $Start, End$ ও $Step$ মান হিসেবে $1, 12$ ও 1 নিচের স্ক্রিনের মতো তালিকা পাওয়া যাবে। তালিকায় $x = 12$ এর জন্য $f(x)$ এর মানই হবে ‘ক’ এর এক বছরের সঞ্চয়।







(Key log- MENU 9 SHIFT x 1 2 0 0 + (x − 1) × 1 0 0 ▶ 1 ▶ x = = 1 = 1 2 = 1 = =)

অনুশীলনী-৮

১। প্রথম 50টি স্বাভাবিক সংখ্যার যোগফল নির্ণয় কর।

২। $7 + 12 + 17 + \cdots$ ধারাটির 30 টি পদের সমষ্টি কত?

৩। $2 - 5 - 12 - 19 - \cdots$ ধারাটির সাধারণ অন্তর এবং 12 তম পদ নির্ণয় কর।

৪। $4 + 7 + 10 + 13 + \cdots$ ধারাটির কোনো পদ 301?

৫। $8 + 16 + 24 + \cdots$ ধারাটির 27 তম পদ কত?

৬। ক্যালকুলেটরে 97 থেকে শুরু করে 10 হ্রাস নিয়ে গণনা কর।

৭। একটি বইয়ের আজকের মূল্য 32 টাকা। যদি প্রতিবছর এর মূল্য 4% করে বৃদ্ধি পায়, তাহলে বাৎসরিক মূল্য বের করার জন্য একটি অনুক্রম বের করতে হবে। এখন থেকে 12 বছর পর বইয়ের মূল্য কত হবে?

৮। ক্যালকুলেটরে মানের তালিকা ব্যবহার করে নিচের অনুক্রমগুলোর প্রথম পাঁচটি পদের মান বের করতে হবে-

(a) $T_n = 2n + 1$
(b) $g_n = 3 \times 2^n$

৯। একটি সমান্তর ধারার প্রথম পদ 12 এবং সাধারণ অন্তর 8. ক্যালকুলেটরে ধারাটির প্রথম ত্রিশটি পদ ব্যবহার করে একটি মানের তালিকা তৈরি করতে হবে। বিশতম পদ কত হবে?

১০। $\boxed{\Sigma-}$ কী ব্যবহার করে নিচের ধারাটির যোগফল বের কর-

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots \ldots\ldots + 10^2$$

১১। ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে প্রথম দশটি পদের যোগফল বের করতে হবে-

(a) $2 + 4 + 8 +$.....
(b) $0.03 + 0.06 + 0.12 +$.....

নবম অধ্যায়

ত্রিকোণমিতি

(Trigonometry)

ত্রিকোণমিতিতে ত্রিভুজের তিনটি বাহু এবং কোণের মধ্যে সম্পর্ক নিয়ে আলোচনা করা হয়। ত্রিকোণমিতির বিভিন্ন ক্ষেত্রে ক্যালকুলেটরের ব্যাপক ব্যবহার রয়েছে। পরিমাপ সংক্রান্ত সমস্যার সমাধানে এবং কোণসমূহের মধ্যে সম্পর্ক অনুধাবন করতে ক্যালকুলেটর সাহায্য করে থাকে। এই অধ্যায়ে-ClassWiz ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে নিম্নোক্ত বিষয়গুলো সম্পর্কে আলোচনা করা হবে-

- কোণ পরিমাপের বিভিন্ন একক
- ত্রিকোণমিতিক অভেদাবলীর সত্যতা যাচাই
- বিভিন্ন চতুর্ভাগে ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহের চিহ্ন নির্ণয়
- ত্রিকোণমিতিক অনুপাতযুক্ত রাশির মান নির্ণয়
- Solve ফাংশন ব্যবহার করে ত্রিকোণমিতিক সমীকরণের সমাধান নির্ণয়
- বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশন সম্পর্কিত সমস্যার সমাধান
- মানের তালিকা ব্যবহার করে লেখচিত্র অঙ্কন ও
- স্থানাংক ব্যবস্থা সম্পর্কিত সমস্যা ।

ত্রিকোণমিতির Calculation করার জন্য [MENU] [1] চেপে Calculate *mode* নির্বাচন করে শুরু করতে হবে।

৯.১ কোণ পরিমাপের একক

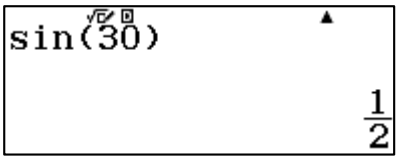
কোণ পরিমাপের জন্য সাধারণত ২ প্রকার একক (Unit) পদ্ধতি ব্যবহার করা হয়।

১। ষাটমূলক পদ্ধতি (Sexagesimal system) ও
২। বৃত্তীয় পদ্ধতি (circular system)

ষাটমূলক পদ্ধতিতে কোণ পরিমাপের একক হচ্ছে 'ডিগ্রি'। এক ডিগ্রিকে সমান 60 ভাগে ভাগ করে প্রতি ভাগকে এক মিনিট ($1'$= one minute) এবং এক মিনিটকে সমান 60 ভাগে ভাগ করে প্রতি ভাগকে এক সেকেন্ড ($1''$ = one second) বলে।

অপরদিকে বৃত্তীয় পদ্ধতিতে এক রেডিয়ান (Radian) কোণকে কোণ পরিমাপের একক ধরা হয়। কোনো বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান চাপ ঐ বৃত্তের কেন্দ্রে যে কোণ উৎপন্ন করে সেই কোণকে এক রেডিয়ান কোণ বলে।

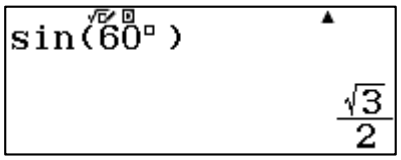
কোনো কোণের ত্রিকোণমিতিক মান বের করার জন্য ক্যালকুলেটরের Angle unit, Degree (ডিসপ্লের উপর ছোট D চিহ্ন) তে আছে কিনা তা খেয়াল রাখতে হবে। যদি না থাকে তাহলে SET UP ([SHIFT] [MENU]) ব্যবহার করে প্রয়োজন অনুযায়ী পরিবর্তন করতে হবে। Angle Unit, ডিগ্রীতে থাকাকালীন যেকোনো কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত (ডিগ্রী এককে) খুব সহজে নিচের স্ক্রিনের মতো করে বের করা যায়-

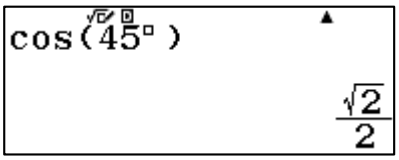


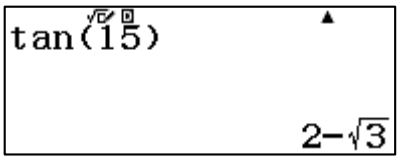
কোণের পরিমাণ-এর পর বন্ধনী ব্যবহার করা ভাল, যদিও ক্যালকুলেটর এটি ছাড়াই সঠিকভাবে ফলাফল প্রদানে সক্ষম।

ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের Calculation করার জন্য ClassWiz- এ [sin], [cos] ও [tan] এই তিনটি বাটন রয়েছে। তাই sec, cosec ও cot এর calculation এর জন্য $\frac{1}{cos}$, $\frac{1}{sin}$ ও $\frac{1}{tan}$ ব্যবহার করতে হবে।

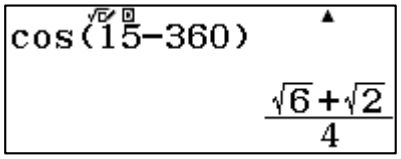
ClassWiz ক্যালকুলেটর কিছু কিছু ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মান সরাসরি ভগ্নাংশ আকারে প্রকাশে সক্ষম। নিচে এমন তিনটি মান দেখানো হলো-

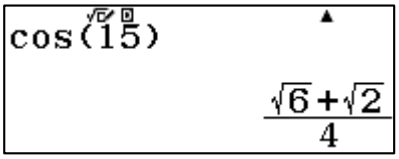


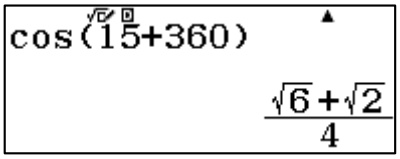




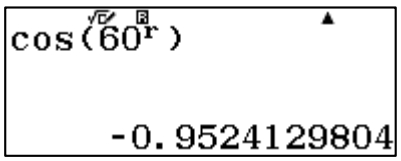
ClassWiz ক্যালকুলেটরের এই বৈশিষ্ট্যটি, কীভাবে ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলোর মানের পুনরাবৃত্তি ঘটে তা নিরীক্ষা করতে সাহায্য করে। উদাহরণস্বরূপ, কীভাবে প্রতি 360° কোণের ব্যবধানে cosine ফাংশনের মানের পুনরাবৃত্তি ঘটে তা নিচের স্ক্রিনে দেখানো হলো-

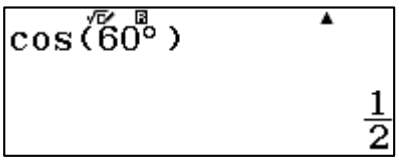


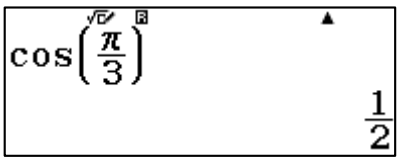




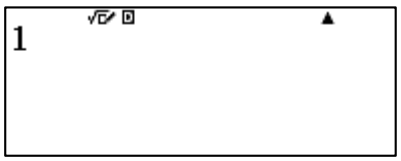
রেডিয়ান এককে ত্রিকোণমিতিক Calculation করার জন্য SET UP ব্যবহার করে Angle unit, radian-এ নিতে হবে। ক্যালকুলেটরে স্ক্রিনের উপরে ছোট করে 'R' প্রদর্শিত হবে। নিচের স্ক্রিনের দিকে লক্ষ্য করলে দেখা যায় যে, যেহেতু প্রথম স্ক্রিনে ছোট করে 'R' প্রদর্শিত হয়েছে, তাই প্রাপ্ত ফলাফলটি সঠিক। দ্বিতীয় স্ক্রিনে cos 60° এর মান বের করার জন্য [OPTN] [2] বাটন ব্যবহার করে ডিগ্রি চিহ্ন দেওয়া হয়েছে যা রেডিয়ান সেটিংসকে আপাতভাবে প্রতিস্থাপিত করে। তৃতীয় স্ক্রিনে দেখা যাচ্ছে, ক্যালকুলেটর কোণের পরিমাপ রেডিয়ানে করছে, কেননা Angle Unit, radian- এ আছে। ফলে এটি 60 রেডিয়ান কোণের $cosine$ এর মান প্রদর্শন করছে।

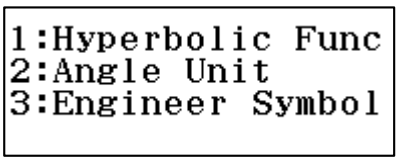


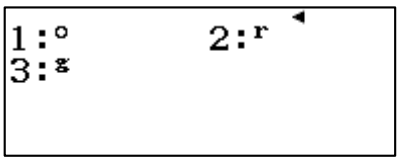


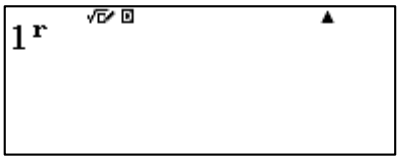


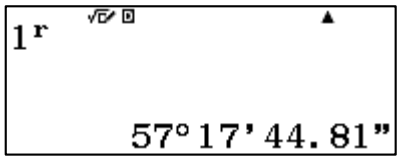
ক্যালকুলেটরের Angle unit, degree-তে থাকা অবস্থায় কোনো কোণের পরিমাপ ডিগ্রি থেকে রেডিয়ানে রূপান্তর করা সম্ভব। এজন্য প্রথমে যে কোণটিকে রূপান্তর করতে হবে তা প্রবেশ করাতে হবে। এরপর [OPTN] [2] বাটন চেপে Angle unit বেছে নিতে হবে। রেডিয়ান নির্বাচনের জন্য [2] চাপতে হবে। এরপর [=] বাটন চাপলে ফলাফল ডিগ্রিতে পাওয়া যাবে। [°'''] বাটন ব্যবহার করে প্রাপ্ত দশমিক ফলাফলকে ডিগ্রি , মিনিট, সেকেন্ডে পাওয়া যাবে, যা নিচে দেখানো হলো-



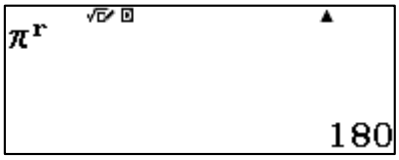


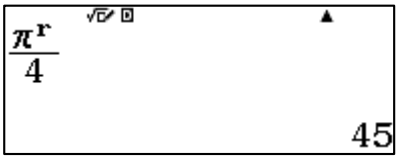


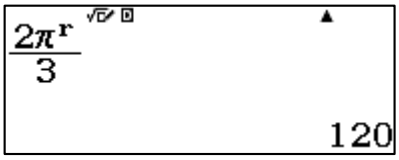




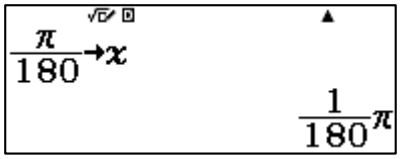
[SHIFT] [×10ˣ] ব্যবহার করে রেডিয়ান কোণের আরেকটি গুরুত্বপূর্ণ বৈশিষ্ট্য দেখানো হলো-

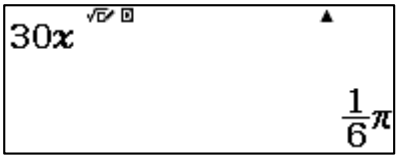


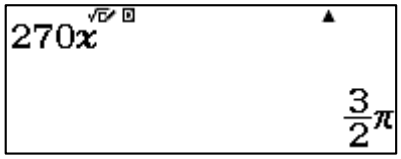




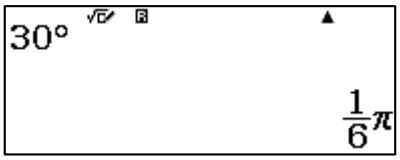
সরাসরি $\frac{\pi}{180}$ দ্বারা গুণ করেও ডিগ্রি থেকে রেডিয়ান কোণে রূপান্তর সম্ভব। এই মানটি ক্যালকুলেটরের মেমোরিতে সংরক্ষণ করে প্রয়োজনানুযায়ী কোণে রূপান্তর সম্ভব যা নিচের স্ক্রিনে দেখানো হলো-

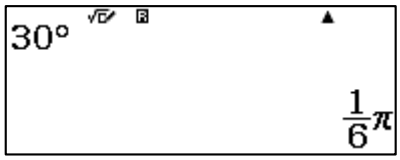






যদি Calculator টি রেডিয়ান *mode* এ থাকে তাহলে একই পদ্ধতি অবলম্বন করে ডিগ্রি থেকে রেডিয়ান কোণে রূপান্তর করা যায়, যা নিচের চিত্রে দেখানো হলো-

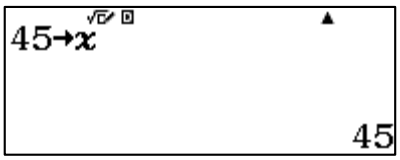


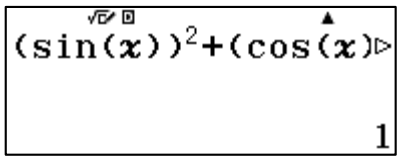


লক্ষণীয়যে, ডিসপ্লেতে প্রদর্শিত ছোট 'R' নির্দেশ করছে যে ক্যালকুলেটরটি রেডিয়ান $mo\ d\ e$ এ আছে।

৯.২ ত্রিকোণমিতিক অভেদাবলীর সত্যতা যাচাই

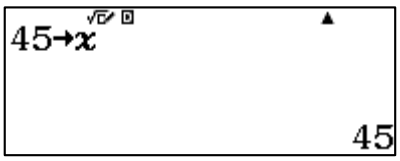
ClassWiz ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে খুব সহজেই ত্রিকোণমিতিক অভেদাবলীর সত্যতা যাচাই করা যায়। উদাহরণস্বরূপ, $sin^2x + cos^2x = 1$ অভেদটির সত্যতা যাচাই করার জন্য প্রথমে [STO] ব্যবহার করে x এর একটি মান সংরক্ষণ করতে হবে। ক্যালকুলেটরে নিচের স্ক্রিনের মতো করে টাইপ করতে হবে। এরপর [=] বাটন চাপলে ফলাফল 1 প্রদর্শিত হবে।

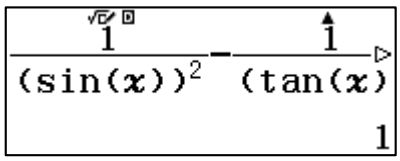




লক্ষণীয়যে, sin^2x কে ক্যালকুলেটরে $(\sin(x))^2$ আকারে টাইপ করতে হয়।

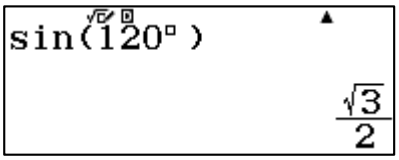
অনুরূপভাবে, $cosec^2x - cot^2x = 1$ অভেদটির জন্য প্রথমে [STO] ব্যবহার করে x এর মান 45 সংরক্ষণ করা হলো। এরপর নিচের মতো করে স্ক্রিনে অভেদটির বামপক্ষ প্রবেশ করিয়ে [=] বাটন চাপলে অভেদটির ডানপক্ষ 1 প্রদর্শন করবে।



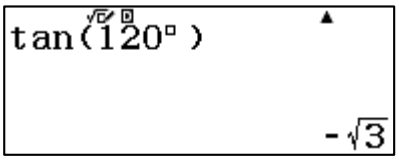


৯.৩ বিভিন্ন চতুর্ভাগে ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহের চিহ্ন নির্ণয়

কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় দুইটি অক্ষ (x অক্ষ ও y অক্ষ) রেখা দ্বারা চারটি চতুর্ভাগ নির্ধারিত হয়ে থাকে। এই চারটি চতুর্ভাগের প্রতিটিতে ত্রিকোণমিতিক অনুপাত সমূহের চিহ্ন ভিন্ন ভিন্ন রকম হয়। প্রথম চতুর্ভাগ ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের জন্য $0°$ থেকে $90°$ নির্দেশ করে। দ্বিতীয় চতুর্ভাগ $91°$ থেকে $180°$, তৃতীয় চতুর্ভাগ $181°$ থেকে $270°$ এবং চতুর্থ চতুর্ভাগ $271°$ থেকে $360°$ নির্দেশ করে। কোনো চতুর্ভাগে কোনো একটি ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের চিহ্ন ধনাত্মক না ঋণাত্মক তা বোঝার জন্য ঐ চতুর্ভাগের কোণ নিয়ে নিরীক্ষা করতে হয়। ধরা যাক, দ্বিতীয় চতুর্ভাগে sin এর চিহ্ন কেমন তা বের করতে হবে। এজন্য $91°$ থেকে $180°$ এর মধ্যে কোনো মান নিতে হবে। এক্ষেত্রে $120°$ নিয়ে নিচের স্ক্রিনে দেখানো হলো-



অনুরূপভাবে দ্বিতীয় চতুর্ভাগে $tangent$ এর চিহ্ন বের করার জন্য নিচের স্ক্রিনের মতো করে $tan120°$ এর মান দেখানো হলো-



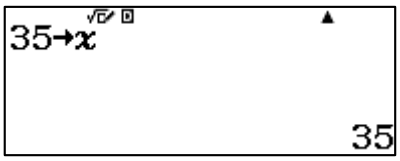
এই দুইটি উদাহরণ থেকে এটি স্পষ্ট যে দ্বিতীয় চতুর্ভাগে $sine$ এর চিহ্ন ধনাত্বক কিন্তু $tangent$এর চিহ্ন ঋণাত্মক। অনুরূপভাবে, যেকোনো চতুর্ভাগে ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের চিহ্ন বের করা যায়।

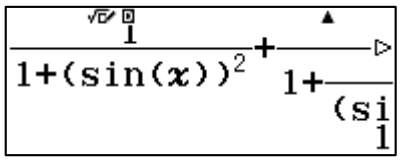
৯.৪ ত্রিকোণমিতিক অনুপাতযুক্ত রাশির মান নির্ণয়

ত্রিকোণমিতিক অনুপাতযুক্ত রাশির মান নির্ণয় করার জন্য প্রথমে STO ব্যবহার করে x এর একটি মান মেমোরিতে সংরক্ষণ করতে হবে। x এর যেকোনো মান নিয়েই ক্যালকুলেশন করা যাবে, তবে লক্ষ্য রাখতে হবে যেন মানটির জন্য রাশির মান অসংজ্ঞায়িত না হয়। যেমন- $tan90°$ এর মান অসংজ্ঞায়িত তাই রাশিতে $tangent$ থাকলে $90°$ ব্যবহার করা যাবে না। আবার $cos90°$ এর মান 0 তাই রাশিতে $secant$ $\left(\frac{1}{cos}\right)$ থাকলেও x এর মান $90°$ নেওয়া যাবে না। তাই বেশীর ভাগ ক্ষেত্রে $x = 35°$ ব্যবহার করা উত্তম।

x এর মান হিসেবে 35 মেমোরিতে সংরক্ষণ করার পর যে রাশিটির মান নির্ণয় করতে হবে তা ক্যালকুলেটরে টাইপ করতে হবে, রাশিতে $secant, cosecant, cotangent$ থাকলে তাদের পরিবর্তে যথাক্রমে $\frac{1}{cos}, \frac{1}{sin}, \frac{1}{tan}$ টাইপ করতে হবে। এরপর = বাটন চাপলে রাশিটির মান পাওয়া যাবে।

উদাহরণস্বরূপ ধরা যাক, $\frac{1}{1+sin^2x} + \frac{1}{1+cosec^2x}$ এর মান বের করার জন্য প্রথমে STO ব্যবহার করে 35 কে x মেমোরিতে সংরক্ষণ করতে হবে। এরপর রাশিটি নিচের মতো করে ক্যালকুলেটরে টাইপ করতে হবে। এরপর = বাটন চাপলে নিচের দ্বিতীয় স্ক্রিনের মতো ফলাফল প্রদর্শিত হবে।



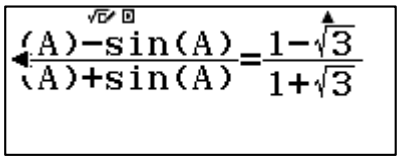


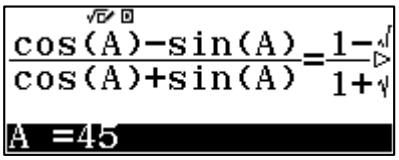
দ্বিতীয় স্ক্রিন হতে দেখা যাচ্ছে রাশিটির মান 1.

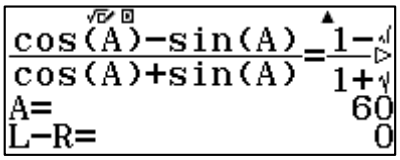
৯.৫ Solver ব্যবহার করে ত্রিকোণমিতিক সমীকরণের সমাধান নির্ণয়

[ALPHA] [CALC] ব্যবহার করে কোনো ত্রিকোণমিতিক সমীকরণকে ক্যালকুলেটরে টাইপ করতে হবে। এরপর [SHIFT] [CALC] (Sovle) চাপলে ক্যালকুলেটর x এর একটি মান চাইবে। যেকোনো একটি মান প্রবেশ করিয়ে [=] বাটন চাপলে সমীকরণের সমাধান ক্যালকুলেটরে প্রদর্শিত হবে।

উদাহরণস্বরূপ, ধরা যাক, $\frac{cosA-SinA}{cosA+SinA} = \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$ সমীকরণে A এর মান বের করতে হবে। এর জন্য ক্যালকুলেটরে সমীকরণটি নিচের প্রথম স্ক্রিনের মতো টাইপ করাতে হবে। এরপর [SHIFT] [CALC] বাটন চাপলে ক্যালকুলেটর এর জন্য একটি মান চাইবে। এর জন্য 45 প্রবেশ করিয়ে [=] বাটন চাপলে নিচের তৃতীয় স্ক্রিনের মতো ফলাফল প্রদর্শিত হবে।







৯.৬ বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশন

$cosine$ ফাংশনকে $cos\theta = x$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলে, $cos^{-1}x = \theta$ অর্থাৎ $cos\theta$ কে ত্রিকোণমিতিক ফাংশন বলা হলে $cos^{-1}x$ কে বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশন বলা হয়। যদিও $cos^2\theta$ এর পরিবর্তে $(cos\theta)^2$ ব্যবহার করা যায় কিন্তু $cos^{-1}x$ এর পরিবর্তে $(cosx)^{-1}$ বা $\frac{1}{cosx}$ লেখা যাবে না। $sin^{-1}x,\ cos^{-1}x$ ও $tan^{-1}x$ এর পরিবর্তে যথাক্রমে $'arc\ sinx',\ 'arc\ cosx'\ ,'arc\ tanx'$ ইত্যাদি ব্যবহার করা যায়।

বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের ক্ষুদ্রতম সংখ্যাসূচক মানকে (ধনাত্মক বা ঋণাত্মক) এর মূখ্যমান বলা হয়। সুতরাং $sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ এবং $\tan^{-1}(-1)$ ফাংশনের মূখ্যমান হলো যথাক্রমে $\frac{\pi}{6}$ এবং $-\frac{\pi}{4}$. যখন কোনো বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের জন্য দুইটি মান হয় (একটি ক্ষুদ্রতম সংখ্যাসূচক ও ঋণাত্মক এবং অপরটি ক্ষুদ্রতম সংখ্যাসূচক ও ধনাত্মক), তখন ধনাত্মক মানকে ঐ ফাংশনের মূখ্যমান ধরা হয়।

বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের মূখ্যমান বের করার জন্য ClassWiz ক্যালকুলেটরে $sin^{-1},\ cos^{-1}$ ও tan^{-1} রয়েছে সেগুলো যথাক্রমে [SHIFT] [sin], [SHIFT] [cos] , [SHIFT] [tan] চেপে পাওয়া যায়। আর $cosec^{-1}x,\ sec^{-1}x$ ও $cot^{-1}x$ ফাংশনের জন্য যথাক্রমে $sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right),\ cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$ ও $tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$ ব্যবহার করতে হবে।

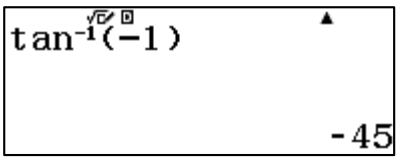
উদাহরণস্বরূপ ধরা যাক, $cotx = -1$ যেখানে $\pi < x < 2\pi.$ x এর মান বের করার জন্য বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশন ব্যবহার করেও করা যায়। আবার Solve ব্যবহার করেও করা যায়।

বিপরীত ত্রিকোণমিতিক ফাংশন ব্যবহার করে x এর মান বের করার জন্য সমীকরণটির অনুরূপ সমীকরণ নিচের মতো করে বের করতে হবে।

$$cotx = -1$$

$$\therefore x = \cot^{-1}(-1), = tan^{-1}\left(\frac{1}{-1}\right) = tan^{-1}(-1)$$

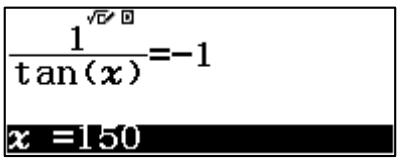
এরপর CalssWiz ক্যালকুলেটরে [SHIFT] [tan] বাটন ব্যবহার করে x এর মান পাওয়া যায় যা নিচে দেখানো হলো।

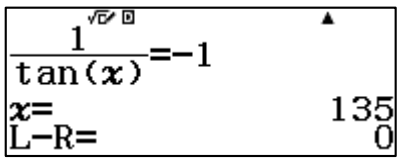


উপরের স্ক্রিন অনুযায়ী x এর মান $-45°$ কিন্তু প্রদত্ত ব্যবধি 2π. সুতরাং প্রাপ্ত মানের সাথে $tanx$ এর পর্যায় 2π বা $360°$ যোগ করলে x এর মান পাওয়া যায়, $360° + (-45) = 315°$.

লক্ষণীয়যে, $sinx$ এর পর্যায় $360°, cosx$ এর পর্যায় $360°, tanx$ এর পর্যায় $360°$.

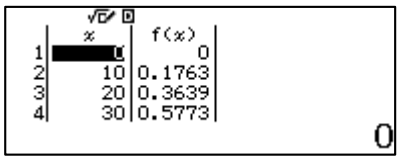
Solve ব্যবহার করে x এর মান আরো দ্রুত বের করা যায়। এজন্য প্রথমে $\frac{1}{tanx} = -1$ ক্যালকুলেটরে টাইপ করতে হবে। এরপর SHIFT CALC ব্যবহার করলে x এর মান চাইবে। x এর মান হিসেবে প্রদত্ত ব্যবধি অর্থাৎ π থেকে 2π এর ভিতরে যেকোনো মান প্রবেশ করিয়ে = চাপলে সরাসরি x এর মান নিচের স্ক্রিনের মতো পাওয়া যাবে।

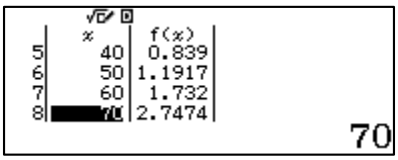


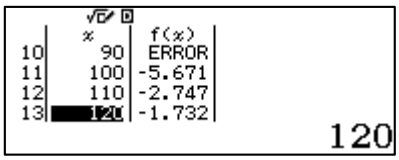


৯.৭ মানের তালিকা ব্যবহার করে লেখচিত্র অঙ্কন

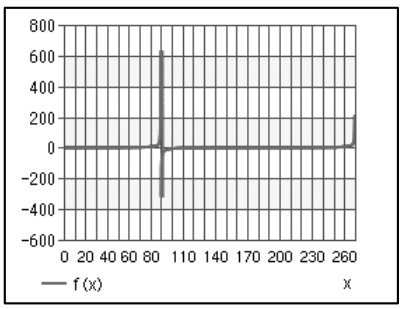
মানের তালিকা ব্যবহার করে যেকোনো ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের লেখচিত্র খুব সহজেই অঙ্কন করা যায়। এজন্য প্রথমে MENU 9 ব্যবহার করে Table *mode* এ প্রবেশ করতে হবে। এখানে চলক হিসেবে x ব্যবহার করা ভালো। উদাহরণস্বরূপ, $tanx$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করার জন্য Table *mode* -এ প্রবেশ করার পর $f(x)$ এর স্থলে $tanx$ টাইপ করতে হবে। এরপর = বাটন চেপে $start, End$ ও $step$ মান হিসেবে $0, 270$ ও 10 প্রবেশ করিয়ে পুনরায় = বাটন চাপলে নিচের মতো মানের তালিকা পাওয়া যাবে।







মানের তালিকার দিকে লক্ষ্য করলে দেখা যাবে যে, $tan90°$ এর মান অসংজ্ঞায়িত হওয়ায় ক্যালকুলেটরে Error প্রদর্শন করছে। উপরের মানের তালিকা হতে প্রাপ্ত মানগুলো ছক কাগজে বসালে $tanx$ এর লেখচিত্র পাওয়া যাবে। $x = 90°$ তে $tanx$ এর কোনো মান না থাকায় খেলচিত্রটি বিচ্ছিন্ন এবং $x = 90°$ তে একটি অসীমতট রেখা আছে যা y অক্ষের সমান্তরাল। QR কোডের মাধ্যমে প্রাপ্ত লেখচিত্রটি নিচে দেখানো হলো।

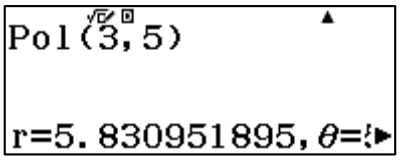


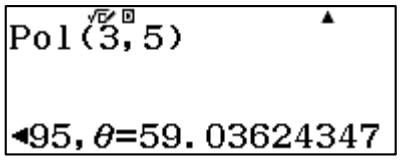
৯.৮ স্থানাংক ব্যবস্থা

ত্রিভুজ সংক্রান্ত গণনাসমূহ ছাড়াও ত্রিকোণমিতি কোনো সমতলে বিন্দুর স্থাপন সংক্রান্ত গণনার ক্ষেত্রে ব্যবহার করা হয়। বহুল প্রচলিত একটি পদ্ধতি হচ্ছে আয়তাকার স্থানাঙ্ক ব্যবস্থা। এটি কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক ব্যবস্থা নামেও পরিচিত।

এই ব্যবস্থায় একটি বিন্দু x ও y অক্ষ থেকে কতটা দূরে তার পরিমাপ দ্বারা বিন্দুটির স্থানাঙ্ক নির্দিষ্ট হয়। কোনো বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(3, 4)$ দ্বারা বোঝা যায় বিন্দুটি y অক্ষ থেকে 3 একক ডানে ও x অক্ষ থেকে 4 একক উপরে আছে।

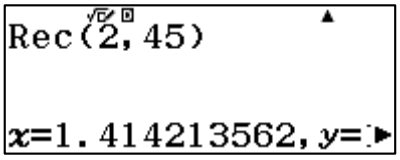
আরেকটি পদ্ধতি হলো পোলার স্থানাংক ব্যবস্থা। এই পদ্ধতিতে একটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয়ের জন্য বিন্দুটি মূল বিন্দু থেকে সরাসরি কত দূরে অবস্থিত এবং x অক্ষ থেকে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে কোণের পরিমাণ কত? তার মাধ্যমে নির্ণয় করা হয়। পোলার স্থানাংক ব্যবস্থায় (r, θ) দ্বারা বিন্দুকে উপস্থাপন করা হয়। ClassWiz এ খুব সহজেই এই দুই পদ্ধতির মধ্যে রূপান্তর সম্ভব। এজন্য SHIFT + (Pol) এবং SHIFT − (Rec) বাটনগুলো ব্যবহার করতে হয়। নিচের স্ক্রিনে কীভাবে কার্তেসীয় স্থানাংক ব্যবস্থা থেকে পোলার স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় রূপান্তর করা যায় তা দেখানো হলো-

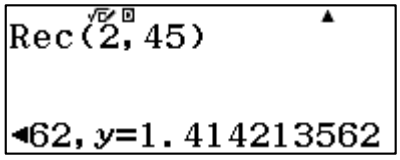




SHIFT) বাটন ব্যবহার করে কমা (,) চিহ্ন দেওয়া হয়েছে।
যেহেতু সংখ্যাগুলো অনেক বড় ও স্ক্রিনে সম্পূর্ণ দেখা যায় না সেজন্য ▶ কী ব্যবহার করে সম্পূর্ণ ফলাফল দেখতে হবে।

এক্ষেত্রে $(3, 5)$ বিন্দুটি পোলার স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় $(5.831, 59.036)$ দ্বারা উপস্থাপন করা হয়। যা দ্বারা বোঝা যায় যে, বিন্দুটি মূলবিন্দু থেকে 5.831 দূরত্বে এবং x অক্ষরেখা থেকে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে $59.036°$ কোণে অবস্থিত। অনুরূপভাবে, নিচের স্ক্রিনে পোলার স্থানাঙ্ক ব্যবস্থা থেকে একটি বিন্দুর আয়তাকার ব্যবস্থায় রূপান্তর দেখানো হলো-



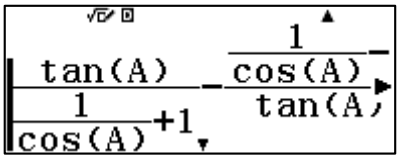


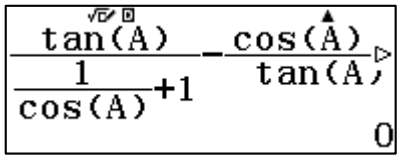
সুতরাং $(2, 45)$ বিন্দুটি কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় $(1.4142,1.4142)$ দ্বারা উপস্থাপন করা যায়।

উদাহরণমালা

1. $\frac{\tan A}{SecA+1} - \frac{SecA-1}{\tan A}$ এর মান নির্ণয় করতে হবে।

সমাধান- এজন্য প্রথমে ClassWiz ক্যালকুলেটরের A মেমরিতে 45 মানটি STO ব্যবহার করে সংরক্ষণ করতে হবে। এরপর নিচের প্রথম স্ক্রিনের মতো করে ত্রিকোণমিতিক রাশিটি প্রবেশ করিয়ে = বাটন চাপলে নিচের দ্বিতীয় স্ক্রীনের মতো ফলাফল পাওয়া যাবে।

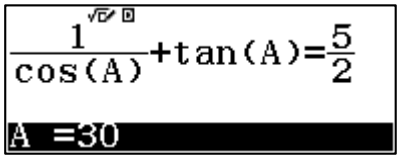


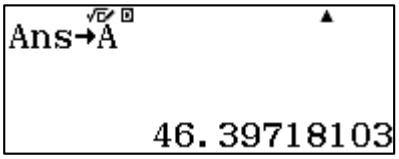


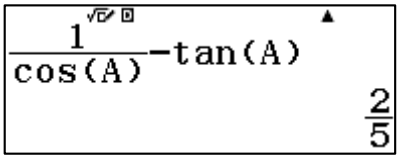
(Key log - 4 5 STO (−) tan ALPHA (−)) ▭ 1 ▭ cos ALPHA (−)) ▶ + 1 ▶ − ▭ ▭ 1 ▶ cos ALPHA (−)) ▶ − 1 ▶ tan ALPHA (−)))

2. $sec\ A + tan\ A = \frac{5}{2}$ হলে, $sec\ A - \tan A$ এর মান নির্ণয় করতে হবে।

সমাধান- এ জন্য প্রথমে [ALPHA] [CALC] (=) ব্যবহার করে প্রথম সমীকরণটি নিচের প্রথম স্ক্রিনের মতো করে প্রবেশ করিয়ে [SHIFT] [CALC] চাপলে ১ম স্ক্রিনের মতো A এর মান চাইবে। A এর প্রাপ্ত মান 46.39718103। [STO] [(−)] (A) চেপে এই মানটি A মেমোরীতে সংরক্ষণ করে তৃতীয় স্ক্রিনের মতো $\frac{1}{\cos(A)} - \tan(A)$ ক্যালকুলেটরে টাইপ করে [=] চাপলে ফলাফল $^2/_5$ পাওয়া যাবে।



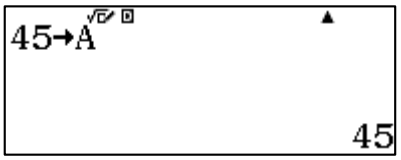


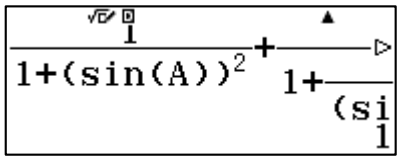


(Key log- [1] [▭/▭] [cos] [ALPHA] [(−)] [)] [▶] [+] [tan] [ALPHA] [(−)] [)] [ALPHA] [CALC] [5] [▭/▭] [2] [SHIFT] [CALC] [3] [0] [=] [=] [STO] [(−)] [1] [▭/▭] [cos] [ALPHA] [(−)] [)] [▶] [−] [tan] [ALPHA] [(−)] [)] [=])

৩. $\frac{1}{1+\sin^2 A} + \frac{1}{1+\text{cosec}^2 A}$ এর মান নির্ণয় করতে হবে।

সমাধান- প্রথমে A মেমোরিতে [STO] ব্যবহার করে 45 সংরক্ষণ করতে হবে। এরপর নিচের ২য় স্ক্রিনের মতো করে রাশিটির টাইপ করতে হবে। এখানে $\sin^2 A = (\sin A)^2$ এবং $cosec^2\ A = \frac{1}{(\sin A)^2}$ লিখা হয়েছে। এরপর [=] বাটন চাপলে ফলাফল পাওয়া যাবে। এক্ষেত্রে ফলাফল 1.

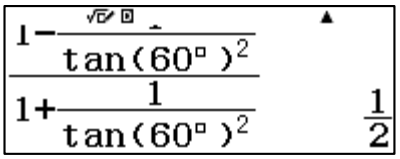




(Key log- [4] [5] [STO] [(−)] [1] [▭/▭] [1] [+] [(] [sin] [ALPHA] [(−)] [)] [)] [x^2] [▶] [+] [1] [▭/▭] [1] [+] [1] [▭/▭] [(] [sin] [ALPHA] [(−)] [)] [)] [x^2] [=])

4. $\frac{1-\cot^2 60°}{1+\cot^2 60°}$ এর মান নির্ণয় করতে হবে।

সমাধান- এজন্য প্রথমে নিচের প্রথম স্ক্রিনের মতো করে মানটি প্রবেশ করিয়ে [=] বাটন চাপলে সরাসরি ফলাফল প্রদর্শিত হবে।

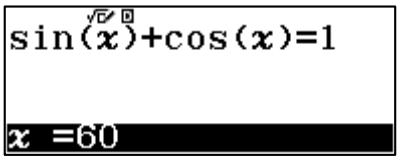


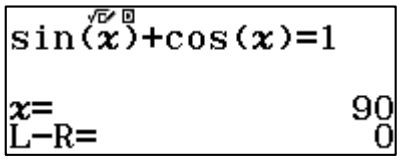
(Key log- [▭/▭] [1] [−] [1] [▭/▭] [tan] [6] [0] [°'''] [)] [x^2] [▶] [▶] [1] [+] [1] [▭/▭] [tan] [6] [0] [°'''] [)] [x^2] [=])

এক্ষেত্রে $cot^2 60$ এর পরিবর্তে $\frac{1}{(tan60°)^2}$ লিখা হয়েছে কেননা $\cot x = \frac{1}{\tan x}$.

5. $sin\theta + cos\theta = 1$ সমীকরণটির সমাধান নির্ণয় করতে হবে যখন $0° \leq \theta \leq 90°$.

সমাধান- এজন্য প্রথমে $\sin x + \cos x = 1$ সমীকরণটি ক্যালকুলেটরে প্রবেশ করাতে হবে। '=' চিহ্ন এর জন্য [ALPHA] [CALC] ব্যবহার করতে হবে। এর পর [SHIFT] [CALC] চাপলে x এর মান চাইবে। প্রদত্ত ব্যবধির ভিতরের যে কোনো মান (এই ক্ষেত্রে 60 নেওয়া হয়েছে) প্রবেশ করিয়ে [=] বাটন চাপলে x তথা θ এর মান পাওয়া যাবে 90°.

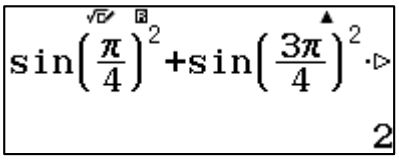




(Key log- [sin] [x] [)] [+] [cos] [x] [)] [ALPHA] [CALC] [1] [SHIFT] [CALC] [6] [0] [=] [=])

6. $sin^2\frac{\pi}{4} + sin^2\frac{3\pi}{4} + sin^2\frac{5\pi}{4} + sin^2\frac{7\pi}{4}$ এর মান নির্ণয় করতে হবে।

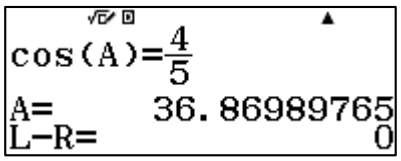
সমাধান- প্রথমে ক্যালকুলেটরের $SETUP$ এ গিয়ে angle unit কে রেডিয়ানে নিতে হবে। এরপর রাশিটিকে নিচের স্ক্রিনের মতো ক্যালকুলেটরে প্রবেশ করিয়ে [=] চাপলে ফলাফল প্রদর্শিত হবে।

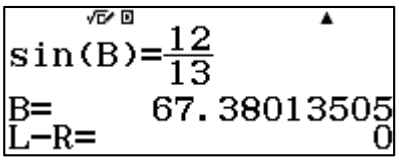


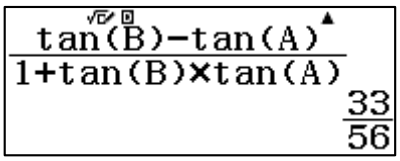
(Key log- [SHIFT] [MENU] [2] [2] [sin] [SHIFT] [×10ˣ] [▭] [4] [)] [)] [x²] [+] [sin] [3] [SHIFT] [×10ˣ] [▭] [4] [▶] [)] [x²] [+] [sin] [5] [SHIFT] [×10ˣ] [▭] [4] [▶] [)] [x²] [+] [sin] [7] [SHIFT] [×10ˣ] [▭] [▶] [)] [x²] [=])

7. $\cos A = \frac{4}{5}, \sin B = \frac{12}{13}$ এবং A ও B উভয়ই সূক্ষ্মকোণ হলে $\frac{\tan B - \tan A}{1+\tan B.\tan A}$ এর মান নির্ণয় করতে হবে।

সমাধান- প্রথমে Calculate *mode* এ $\cos A = \frac{4}{5}$ টাইপ করে [SHIFT] [CALC] (SOLVE) চেপে A এর মান বের করতে হবে। এরপর [STO] চেপে প্রাপ্ত ফলাফলকে A মেমোরিতে সংরক্ষণ করতে হবে। একই ভাবে B এর মান বের করার পর $\frac{\tan B - \tan A}{1+\tan B.\tan A}$ ক্যালকুলেটরে টাইপ করে [=] বাটন চাপলে ফলাফল প্রদর্শিত হয়।





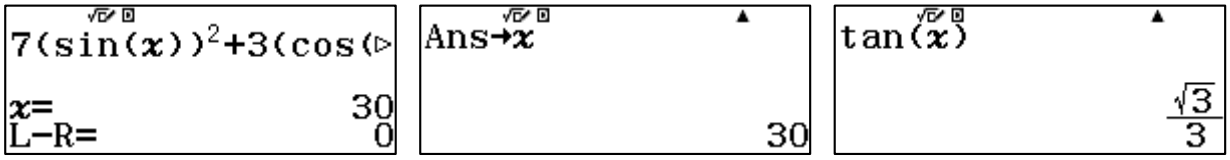


(Key log- [cos] [ALPHA] [(−)] [)] [ALPHA] [CALC] [4] [▭] [5] [SHIFT] [CALC] [3] [5] [=] [=] [STO] [(−)] [=] [sin] [ALPHA] [°'''] [)] [ALPHA] [CALC] [1] [2] [▭] [1] [3] [SHIFT] [CALC] [3] [5] [=] [=] [STO] [°'''] [=] [AC] [▭] [tan] [ALPHA] [°'''] [)] [−] [tan] [ALPHA] [(−)] [)] [▶] [1] [+] [tan] [ALPHA] [°'''] [)] [×] [tan] [ALPHA] [(−)] [)] [=])

8. $7sin^2\theta + 3cos^2\theta = 4$ হলে $tan\theta$ এর মান বের করতে হবে।

সমাধান- Calculate *mode*- এ প্রথমে $7sin^2\theta + 3cos^2\theta = 4$ নিচের স্ক্রিনের মতো টাইপ করতে হবে। [SHIFT] [CALC] চাপার পর x এর যেকোনো মান প্রবেশ করিয়ে [=] বাটন চাপলে x এর প্রকৃত মান পাওয়া যাবে। [STO]

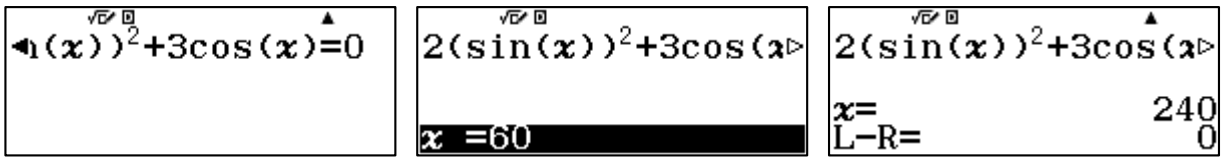
বাটন চেপে [x] মেমোরিতে এই মান সংরক্ষণ করতে হবে। এরপর তৃতীয় স্ক্রিনের মতো $\tan x$ টাইপ করে [=] চাপলে $tan\theta$ এর মান পাওয়া যাবে।



(Key log- [7] [(] [sin] [x] [)] [)] [x²] [+] [3] [(] [cos] [x] [)] [)] [x²] [ALPHA] [CALC] [4] [SHIFT] [CALC] [4] [5] [=] [=] [STO] [x] [=] [tan] [x] [)] [=])

9. $2\sin^2 x + 3\cos x = 0$, এর সমাধান করতে হবে যেখানে $0 < x < 2\pi$.

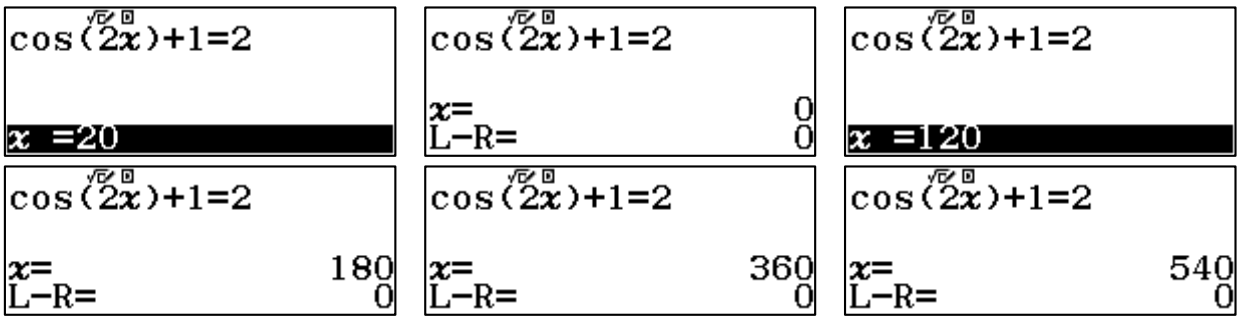
সমাধান- প্রথমে Calculate *mode*- এ সমীকরণটিকে নিচের প্রথম স্ক্রিনের মতো টাইপ করতে হবে। [SHIFT] [CALC] চাপার পর x এর মান হিসেবে 0 থেকে 2π এর মধ্যে যেকোনো মান প্রবেশ করাতে হবে। এরপর [=] বাটন চাপলে তৃতীয় স্ক্রিনের মতো ফলাফল প্রদর্শিত হবে।



(Key log- [2] [sin] [x] [)] [+] [3] [cos] [x] [)] [ALPHA] [CALC] [0] [SHIFT] [CALC] [1] [3] [0] [=] [=])

10. $cos2\theta + 1 = 2$ এর সমাধান করতে হবে।

সমাধান- এই ত্রিকোণমিতিক সমস্যার জন্য অসংখ্য সমাধান পাওয়া যাবে। অর্থাৎ θ এর অসংখ্য মান পাওয়া যাবে। এই ধরনের সমস্যা সমাধানের জন্য SOLVE *mode* ব্যবহার করা সুবিধাজনক। SOLVE *mode* ব্যবহার করলে θ এর একাধিক মান পাওয়া যাবে। প্রথমে সমীকরণটিকে নিচের প্রথম স্ক্রিনের মতো ক্যালকুলেটরে প্রবেশ করিয়ে [SHIFT] [CALC] চাপতে হবে। এরপর প্রথমে x এর মান 20 প্রবেশ করিয়ে [=] চাপলে দ্বিতীয় স্ক্রিনের মতো ফলাফল পাওয়া যাবে 0 । অবশ্যই $0°$ সমীকরণটির একটি সমাধান। এরপর x এর অনুমিত মান হিসেবে $120°$ প্রবেশ করালে 120 এর নিকটতম সমাধান 180 পাওয়া যাবে। এভাবে 300 প্রবেশ করালে 360 ও 470 এর জন্য 540 এবং এভাবে আরও মান প্রবেশ করাতে থাকলে অন্যান্য সমাধাণগুলোও পাওয়া যাবে।



অনুশীলনী-৯

মান নির্ণয় কর-

১। $\frac{1-\cos^2 60^\circ}{1+\cos^2 60^\circ} + \sec^2 60^\circ$

২। $\frac{1-\cot^2 60^\circ}{1+\cot^2 60^\circ}$

৩। $tan45^\circ . \sin^2 60^\circ \ . tan30^\circ \ . tan60^\circ$

৪। সমাধান কর- $\frac{cosA-sinA}{cosA+sinA} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$

৫। মান নির্ণয় কর- $3\cot^2 60^\circ + \frac{1}{4} cosec^2 30^\circ + 5\sin^2 45^\circ - 4\cos^2 60^\circ$

৬। মান নির্ণয় কর- (a) $sin30^\circ$ (b) $\cos 2\ radians$

৭। $cos\theta = \frac{1}{2}$ হলে $cot\theta$ এর মান কোনোটি?

৮। 34.458° কে ডিগ্রি, মিনিট ও সেকেন্ডে রূপান্তর কর।

৯। $sin15^\circ$ এর সঠিক মান কত?

১০। 31° কে রেডিয়ানে প্রকাশ করলে কী হবে?

১১। $(6, 5)$ বিন্দুটির পোলার আকৃতি কীরূপ হবে?

১২। $(4,240^\circ)$ বিন্দুটিকে কার্তেসীয় স্থানাঙ্কে রূপান্তর করতে হবে? এটি কোনো চতুর্ভাগে অবস্থিত?

১৩। ABC ত্রিভুজের $AC = 17.2\ cm, B = 35^\circ$ এবং $A = 82^\circ. BC$ এর দৈর্ঘ্য বের কর।

১৪। সমাধান কর- $4\cos x + 6 = 7,\ 0^\circ < x < 360^\circ.$

১৫। সমাধান কর- $5\sin x - 2 = 1.$

১৬। 18 মিটার লম্বা একটি মই একটি দেওয়ালের ছাদ বরাবর ঠেস দিয়ে ভূমির সঙ্গে 45° কোণ উৎপন্ন করে। দেওয়ালটির উচ্চতা নির্ণয় কর।

১৭। একটি মিনারের পাদদেশ থেকে কিছু দূরে একটি স্থানে মিনারটির শীর্ষের উন্নতি কোণ 30° এবং মিনারটির উচ্চতা 26 মিটার হলে, মিনার থেকে ঐ স্থানটির দূরত্ব নির্ণয় কর।

১৮। 64 মিটার লম্বা একটি খুঁটি ভেঙ্গে গিয়ে সম্পূর্ণ বিচ্ছিন্ন না হয়ে ভূমির সাথে 60° কোণ উৎপন্ন করে। খুঁটিটির ভাঙা অংশের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

১৯। 0 থেকে 180 ডিগ্রির মধ্যে $cosine$ ফাংশনের মানের তালিকা তৈরি করতে হবে। মানের তালিকা ব্যবহার করে $\cos x$ এবং $\cos(180^\circ - x)$ কীভাবে সম্পর্কিত তা ব্যখ্যা কর।

২০। শিক্ষার্থীরা তাদের থেকে $50m$ দূরত্বের একটি গাছের উচ্চতা মাপতে চায়। তারা দেখলো, গাছটির উন্নতি কোণ 17°। গাছটির আনুমানিক উচ্চতা কত?

দশম অধ্যায়

ম্যাট্রিক্স
(Matrices)

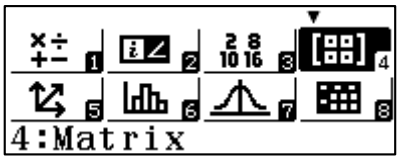
কয়েকটি সংখ্যা, প্রতীক বা রাশিকে সারি ও কলামের মাধ্যমে আয়তাকারভাবে বিন্যস্ত করলে তাকে ম্যাট্রিক্স বলে। যে কোনো সমীকরণ জোট বা বিন্দুর সেটকে উপস্থাপন করতে এবং দক্ষতার সাথে তথ্যসমূহের বিশ্লেষণ করতে ম্যাট্রিক্স খুবই কার্যকরী। এই অধ্যায়ে ClassWiz ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে নিম্নোক্ত বিষয়গুলো সম্পর্কে আলোচনা করা হবে-

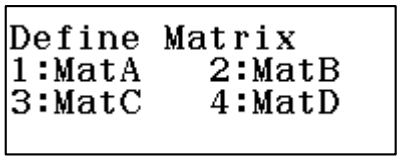
- ম্যাট্রিক্স নির্ধারণ
- ম্যাট্রিক্সের বিভিন্ন রকম $Operation$
- বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় ও
- ম্যাট্রিক্স ও সমীকরণের সম্পর্ক ইত্যাদি

সেজন্য MENU 4 চেপে Matrix *mode* নির্বাচন করতে হয়।

১০.১ ম্যাট্রিক্স নির্ধারণ

ClassWiz ক্যালকুলেটরের মাধ্যমে খুব সহজেই ম্যাট্রিক্সের যোগ, বিয়োগ, গুণ,ভাগ ইত্যদি করা যায়। এই ক্যালকুলেটরে সর্বোচ্চ চারটি $(A, B, C$ ও $D)$ ম্যাট্রিক্স নির্ধারণ করা যায় ও এদের নিয়ে কাজ করা যায়। আবার প্রতিটি ম্যাট্রিক্সের জন্য সর্বোচ্চ চারটি সারি ও চারটি কলাম নির্ধারণ করা যায়। Matrix *mode* এ ঢোকার সাথে সাথে নিচের স্ক্রিনের মতো স্ক্রিন প্রদর্শিত হবে এবং সেখান থেকে একটি ম্যাট্রিক্স নির্ধারণ করতে হবে-





A, B, C ও D ম্যাট্রিক্স নির্ধারণের জন্য যথাক্রমে 1,2,3 ও 4 চাপতে হয়। 1 চেপে Mat A নির্ধারণের পর ম্যাট্রিক্সটির মাত্রা নির্ধারণ করতে হবে। প্রথমে সারির সংখ্যা এবং এরপর কলামের সংখ্যা নির্বাচন করতে হবে। কেননা 3×4 মাত্রার ম্যাট্রিক্স বলতে এমন ম্যাট্রিক্স বোঝায় যার সারির সংখ্যা 3 ও কলামের সংখ্যা 4। উদাহরণস্বরূপ একটি ম্যাট্রিক্স

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & \frac{1}{2} & 5 \\ 1 & \frac{5}{2} & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

ম্যাট্রিক্সটির সারির সংখ্যা 2, এবং কলামের সংখ্যা 4, অর্থাৎ এর মাত্রা 2×4.

এই ম্যাট্রিক্সটি ক্যালকুলেটরে প্রবেশ করানোর জন্য প্রথমে mat A নির্ধারণ করার পর মাত্রা এর জন্য প্রথমে 2 এবং এরপর 4 নির্ধারণ করতে হবে।

```
Define Matrix
1:MatA    2:MatB
3:MatC    4:MatD
```

```
MatA
Number of Rows?

Select 1~4
```

```
MatA
Number of
     Columns?
Select 1~4
```

ম্যাট্রিক্সটির উপাদানগুলো প্রবেশ করানোর জন্য প্রতিটি উপাদান প্রবেশ করানোর পর [=] বাটন চাপতে হবে। ভুল সংশোধনের জন্য কার্সর বাটন চেপে নির্দিষ্ট অবস্থানে যেয়ে পরিবর্তন করা যায়। ভগ্নাংশ প্রবেশ করানোর জন্য [▭] কী ব্যবহার করতে হয়। ম্যাট্রিক্সের উপাদানগুলো প্রবেশ করানোর পর নিচের মতো স্ক্রিন প্রদর্শিত হবে।

```
MatA=
 [   0     3    0.5     5]
 [   1   2.5      3     4]

                         4
```

ম্যাট্রিক্সের উপাদানগুলো প্রবেশ করানো শেষ হলে [AC] বাটন চাপতে হয়।

অন্যান্য ম্যাটিক্স নির্ধারণ ও কোনো ম্যাট্রিক্সের সম্পাদনা (Edit), Matrix *mode* এ [OPTN] menu থেকে করা যায়।

```
1:Define Matrix
2:Edit Matrix
3:MatA    4:MatB
5:MatC    6:MatD
```

কোনো ম্যাট্রিক্সের মাত্রা পুনঃ নির্ধারণ করতে হলে পুনরায় ম্যাট্রিক্সটি নির্ধারণ (Define) করতে হয়। Matrix *mode* থেকে সরে গেলে পূর্ব নির্ধারিত ম্যাট্রিক্সের উপাদানসমূহ ক্যালকুলেটরের স্মৃতি থেকে মুছে যাবে।

ম্যাট্রিক্স নির্ধারণ করার পর [OPTN] menu ব্যবহার করে ম্যাট্রিক্সের বিভিন্ন হিসাব যেমন যোগ, বিয়োগ, গুণ, নির্ণায়ক (Determinant), Transposition, Identity ইত্যাদি সহজেই বের করা যায়। [▲] ও [▼] কী ব্যবহার করে menu এর সবগুলো option দেখা যায়।

```
1:MatAns
2:Determinant
3:Transposition
4:Identity
```

```
1:Hyperbolic Func
2:Angle Unit
3:Engineer Symbol
```

ম্যাট্রিক্সের $Operation$ সম্পর্কে ধারণা লাভ করার জন্য নিচের চারটি ম্যাট্রিক্স প্রথমে ক্যালকুলেটরে প্রবেশ করাতে হবে।

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 9 & 0 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 5 & 9 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

[OPTN] Menu থেকে A, B, C অথবা D ম্যাট্রিক্স নির্ধারণ করার পর উপাদানগুলো প্রবেশ করিয়ে [=] বাটন চাপতে হবে। নিচে A ম্যাট্রিক্সের উপাদানগুলো প্রবেশ করানোর আগে ও পরের স্ক্রিন দুটি দেখানো হলো-

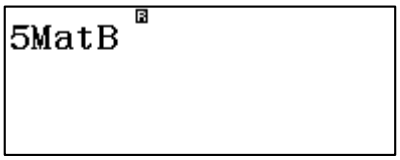
```
MatA=
 [   0     0     0]
 [   0     0     0]
 [   0     0     0]
```

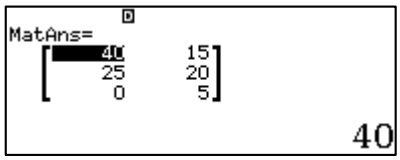
```
MatA=
 [   3     0     1]
 [   2     4     2]
 [   9     0     5]

                   5
```

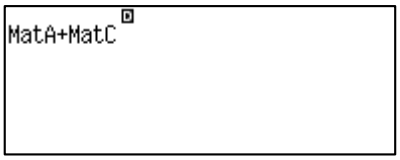
[OPTN] menu এর দ্বিতীয় স্ক্রিনে Mat Ans নামে একটি option আছে যা ক্যালকুলেটরে করা সর্বশেষ Matrix এর হিসেবের ফলাফল সংরক্ষণ করে রাখে। Mat Ans নির্বাচন করে এই সর্বশেষ ফলাফল নিয়ে কাজ করা যায়।

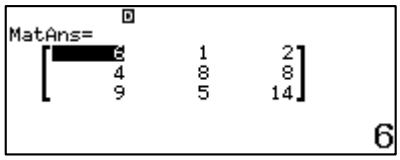
একটি ম্যাট্রিক্সকে কোনো সংখ্যা দ্বারা গুণ করতে হলে ঐ ম্যাট্রিকের সকল উপাদানকে ঐ সংখ্যা দ্বারা গুণ করতে হবে। ক্যালকুলেটরে এই গুণ করার জন্য সংখ্যাটি প্রবেশ করানোর পর গুণ চিহ্ন দেওয়ার প্রয়োজন পরে না। নিচে B ম্যাট্রিক্সকে 5 দ্বারা গুণ করা হলো। এজন্য প্রথমে 5 প্রবেশ করিয়ে [OPTN] বাটন চেপে Mat B নির্বাচন করার জন্য [4] চাপতে হবে। এরপর [=] বাটন চাপলে ফলাফল পাওয়া যাবে।



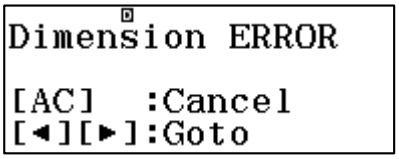


দুইটি সমান মাত্রার ম্যাট্রিক্স যেমন, A ও C কে যোগ ও বিয়োগ করা যায়। ম্যাট্রিক্সদ্বয়ের অনুরূপ অবস্থানের উপাদানগুলো যোগ কিংবা বিয়োগ করে নতুন একটি ম্যাট্রিক্স পাওয়া যাবে। যেমন, নিচে লক্ষ্যণীয়, $3 + 3 = 6, 0 + 1 = 1$। নিচে Aও C দুটি ম্যাট্রিক্স যোগ করে দেখানো হলো-



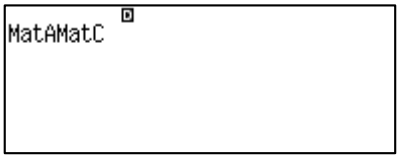


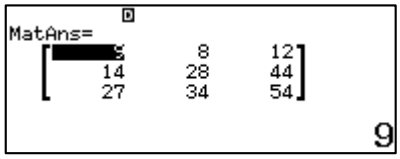
যেসকল ম্যাট্রিক্সের ডাইমেনশন (মাত্রা) সমান নয় তাদের মধ্যে যোগ বিয়োগ সম্ভব নয় এবং এটি করতে গেলে ক্যালকুলেটর Dimension Error প্রদর্শন করবে। যেমন, A ও B ম্যাট্রিক্স যোগ করলে এরকম ঘটনা ঘটবে।



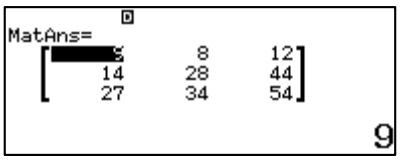
অনুরূপভাবে, দুইটি ম্যাট্রিক্সের গুণ তখনই সম্ভব যখন প্রথমটির কলামের সংখ্যা ও দ্বিতীয়টির সারির সংখ্যা সমান হবে। A ম্যাট্রিক্সের প্রথম সারির প্রত্যেকটি উপাদানকে C ম্যাট্রিক্সের প্রথম কলামের অনুরূপ প্রত্যেকটি উপাদান দিয়ে গুণ করে তাদের বীজগণিতীয় সমষ্টি হবে AC ম্যাট্রিক্সের প্রথম সারির প্রথম উপাদান অর্থাৎ AC_{11}।

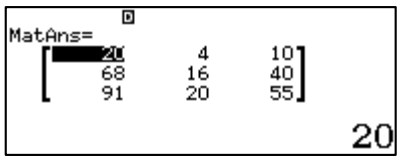
অর্থাৎ $3 \times 3 + 0 \times 2 + 1 \times 0 = 9$



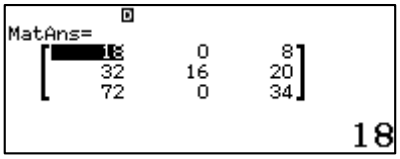


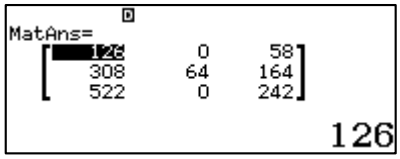
একইভাবে, AC_{12} পাওয়ার জন্য A এর প্রথম সারির সাথে C ম্যাট্রিক্সের দ্বিতীয় কলাম গুণ করে যোগ করতে হবে এবং এভাবে অগ্রসর হলে বাকি উপাদানগুলো পাওয়া যাবে। [×] চিহ্ন ব্যবহার করে ম্যাট্রিক্স গুণন লেখা যায়, যদিও তা প্রয়োজনীয় না। নিচের ফলাফল থেকে দেখা যায় ম্যাট্রিক্স গুণন বিনিময় সূত্র মেনে চলেনা। অর্থাৎ $AC \neq CA$



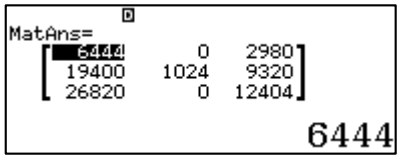


একটি বর্গ ম্যাট্রিক্সকে তার নিজের সাথেই গুণ করা যায় (যেহেতু এর সমান সংখ্যক সারি ও কলাম আছে)। x^2 এবং x^3 ব্যবহার করে বর্গ ম্যাট্রিক্সের যথাক্রমে বর্গ এবং ঘন বের করা যায়। নিচে $A \times A = A^2$ ও $A \times A \times A = A^3$ বের করে দেখানো হলো-





লক্ষণীয় যে $x^{\blacksquare}$ বাটন ব্যবহার করা যাবে না। বর্গ ম্যাট্রিক্সের আরো উচ্চ ঘাতের ফলাফল বের করতে দ্বিঘাত এবং ত্রিঘাতের সমন্বয়ে করতে হবে। উদাহরণস্বরূপ, A^5 বের করে দেখানো হলো-



১০.২ বিপরীত ম্যাট্রিক্স

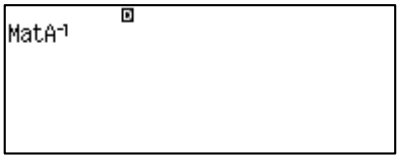
ম্যাট্রিক্সের ভাগ, সংখ্যার ভাগের মতো সরাসরি নির্ণয় করা যায় না। এর পরিবর্তে, বিপরীত ম্যাট্রিক্স ব্যবহার করা হয়ে থাকে। শুধুমাত্র বর্গ ম্যাট্রিক্সের জন্য বিপরীত ম্যাট্রিক্স বের করা সম্ভব। সংখ্যার ভাগের মতো একে চিন্তা করা যায়। যেমন- $7 \div 8 = 7 \times 8^{-1}$. 8 এর বিপরীত সংখ্যাকে 8^{-1} দ্বারা উপস্থাপন করা হয়েছে। 8^{-1} কে 8 দ্বারা গুণ করলে 1 পাওয়া যায়, যা এই গুণণের identity (অভেদ)-

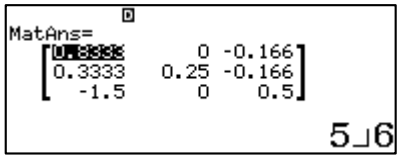
$$8 \times 8^{-1} = 1$$

একইভাবে, A ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্স A^{-1} এর অনুরূপ বৈশিষ্ট্য রয়েছে। A এবং A^{-1} এর গুণনে যে identity ম্যাট্রিক্স পাওয়া যায় যার মূখ্য কর্ণের উপাদানগুলো 1 এবং বাকি উপাদানগুলো 0.

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

x^{-1} কী ব্যবহার করে বিপরীত ম্যাট্রিক্স পাওয়া যায় যা নিচে দেখানো হয়েছে-

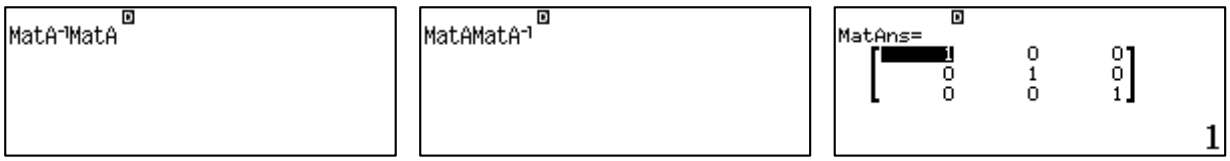




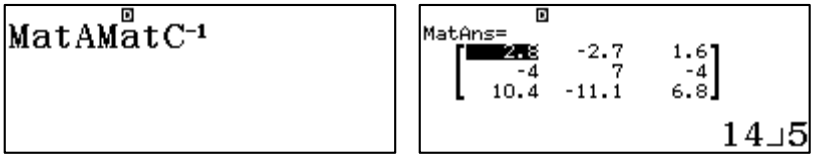
A^{-1} এর যে উপাদানে কার্সর আনা হবে, ক্যালকুলেটর সেটিকে ভগ্নাংশ আকারে প্রদর্শন করবে-

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{6} & 0 & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

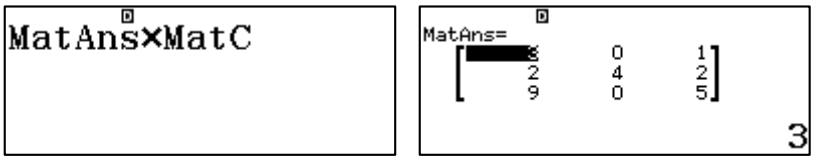
$AA^{-1} = A^{-1}A =$ I, যেখানে I হলো identity ম্যাট্রিক্স। Identity ম্যাটিক্স দেখানোর জন্য ক্যালকুলেটরের প্রয়োগ নিচে দেওয়া হলো-



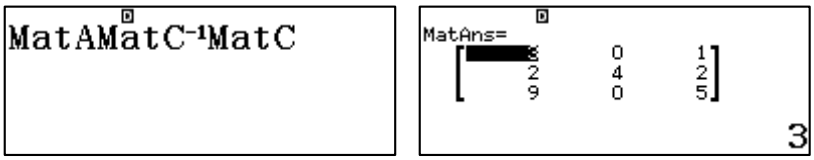
সুতরাং, $A \div C$ বের করার জন্য ক্যালকুলেটরে AC^{-1} বের করতে হবে। নিচে দেখানো হলো-



$7 \div 8$ কে 8 দিয়ে গুণ করলে যেমন পুনরায় 8 পাওয়া যায় তেমনি AC^{-1} কে C দিয়ে গুণ করলে A পাওয়া যাবে। উপরে প্রাপ্ত ফলাফল নিচের স্ক্রিনের মতো C দিয়ে গুণ করলে সাথে সাথে A পাওয়া যাবে। লক্ষণীয় যে ক্যালকুলেটর এক্ষেত্রে Mat Ans ব্যবহার করবে।

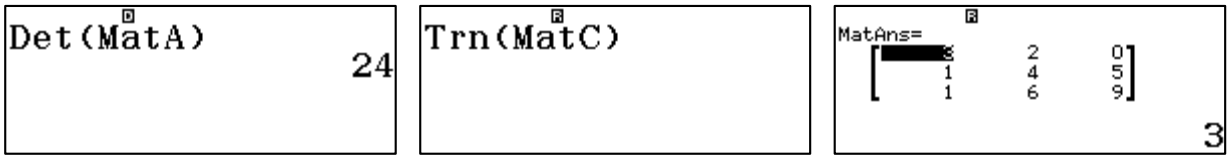


ক্যালকুলেটরে নতুনভাবে পুরোটা লিখেও দেখা যায় $AC^{-1}C = AI = A$.



যেহেতু ম্যাট্রিক্স গুণন বিনিময় সূত্র মেনে চলেনা, তাই নির্দিষ্ট ক্রমেই এদের গুণ করতে হবে। এক্ষেত্রে CAC^{-1} এর ফলাফল কখনো A আসবেনা।

বর্গ ম্যাট্রিক্সের সংখ্যা রাশিকে নির্ণায়ক বলে। কোনো বর্গ ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্স বের করতে হলে পূর্বে পরীক্ষা করতে হয় যে এর নির্ণায়কের মান শূন্য কিনা। যদি নির্ণায়কের মান শূন্য হয়, তাহলে বর্গ ম্যাট্রিক্সটির বিপরীত ম্যাট্রিক্স থাকবে না। পক্ষান্তওে, শূন্য ছাড়া অন্য যেকোনো মান থাকলে বিপরীত ম্যাট্রিক্স থাকবে। OPTN menu এর দ্বিতীয় স্ক্রিন থেকে সরাসরি কোনো ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়ক বের করা যায়। 2 চেপে Determinant নির্বাচন করে আবার OPTN থেকে Mat A নির্বাচন করতে হবে। এরপর = চাপলে ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়কের মান পাওয়া যাবে।



কোনো ম্যাট্রিক্সের সারিগুলোকে কলামে এবং কলামগুলোকে সারিতে রূপান্তর করলে তাকে ট্রান্সপোজ ম্যাট্রিক্স বলে। C ম্যাট্রিক্সের ট্রান্সপোজকে C' দ্বারা প্রকাশ করা হয়। OPTN menu এর দ্বিতীয় পেজ থেকে সরাসরি এটি পাওয়া যায় যা উপরের দ্বিতীয় ও তৃতীয় চিত্রে দেখানো হলো।

১০.৩ ম্যাট্রিক্স এবং সমীকরণ

ম্যাটিক্সের একটি গুরুত্বপূর্ণ ব্যবহার হলো সরল সহ সমীকরণের উপস্থাপন ও তার সমাধান। সমীকরণের সমাধান অনুচ্ছেদে আলোচনা করা হয়েছে যে, ক্যালকুলেটর সরলসহ সমীকরণ সমাধান করতে সহগের ম্যাট্রিক্স ব্যবহার করে। একই কাজ ম্যাট্রিক্স ব্যবহার করেও করা যায়।

ধরা যাক, একটি সরল সহসমীকরণ,

$$3x - y = 20$$

$$2x + 5y = 2$$

এই সমীকরণ জোটকে ম্যাট্রিক্স আকারে উপস্থাপন করলে হবে $AX = B$ যেখানে

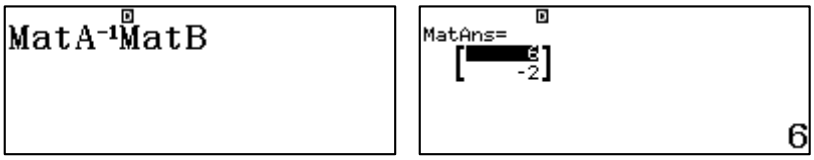
$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 20 \\ 2 \end{bmatrix}$$

এরপর ম্যাট্রিক্স সমীকরণের উভয় পক্ষকে A^{-1} দ্বারা গুণ করলে এর সমাধান পাওয়া যাবে;

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

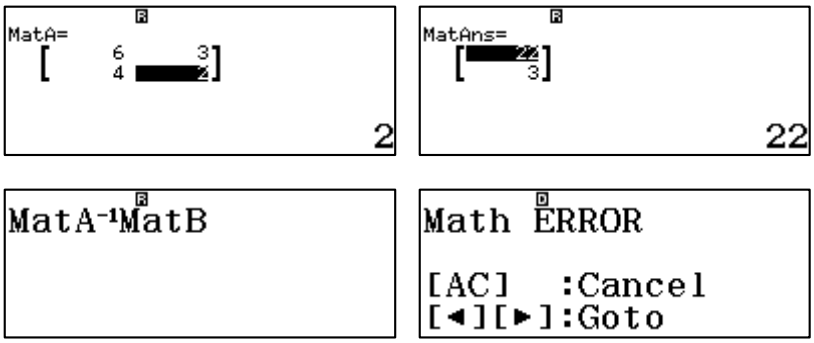
$$\Rightarrow X = A^{-1}B$$

A ও B ম্যাট্রিক্স ক্যালকুলেটরে প্রবেশ করানোর পর, $A^{-1}B$ কে নিচের স্ক্রিনের মতো প্রবেশ করলে ফলাফল প্রদর্শিত হবে-



উপরের 2×1 ম্যাট্রিক্স থেকে $x = 6$ ও $y = -2$ পাওয়া যায়।

উল্লেখ্য যে, সহগের ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়কের মান যদি শূন্য হয় তাহলে সরল সহসমীকরণের অনন্য সমাধান থাকবে না। নিচে একটি উদাহরণ দেওয়া হলো-

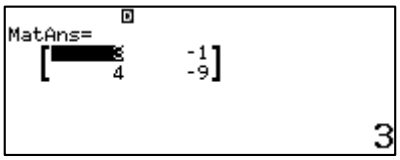


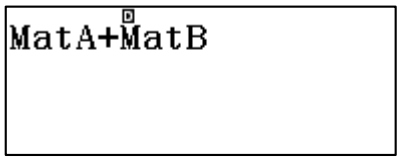
তিন ও চার চলকযুক্ত সরলসহ সমীকরণের সমাধানের জন্যও একই পদ্ধতি অবলম্বন করতে হবে।

উদাহরণমালা

১. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ ও $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$ হলে $A + B = ?$

সমাধান- প্রথমে [MENU] [4] চেপে Matrix *mode* এ আসতে হবে। এরপর Mat A ও Mat B তে যথাক্রমে A ও B ম্যাট্রিক্স প্রবেশ করাতে হবে। এরপর [OPTN] menu হতে Mat A ও Mat B নিয়ে নিচের মতো করে যোগ করতে হবে।

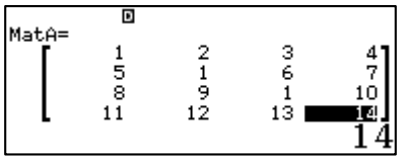


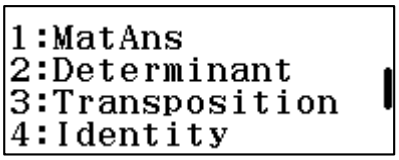


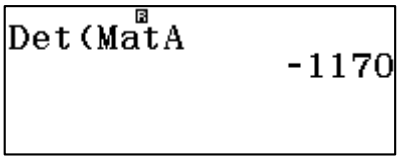
(Key log- [MENU] [4] [1] [2] [2] [1] [=] [2] [=] [3] [=] [−] [4] [=] [=] [AC] [OPTN] [1] [2] [2] [2] [2] [=] [−] [3] [=] [1] [=] [−] [5] [=] [AC] [OPTN] [3] [+] [OPTN] [4] [=])

২. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 \end{bmatrix}$ হলে $A^{-1} = ?$

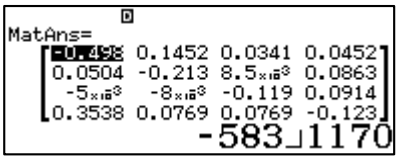
সমাধান- 1 নং উদাহরণের মতো করে A ম্যাট্রিক্স ক্যালকুলেটরে প্রবেশ করাতে হবে। তবে সারি ও কলাম সংখ্যা 4 নির্বাচন করতে হবে। এরপর [OPTN] menu এর দ্বিতীয় স্ক্রিন থেকে 2 নির্বাচন করতে হবে। অতঃপর আবার [OPTN] চেপে Mat A নির্বাচন করতে হবে। এরপর [=] বাটন চাপলে নিচের স্ক্রিনের মতো নির্ণায়কের মান পাওয়া যাবে।







যেহেতু নির্ণায়কের মান শূন্য নয় তাই ম্যাট্রিক্সটির বিপরীত ম্যাট্রিক্স থাকবে। অতঃপর [OPTN] menu থেকে Mat A নিয়ে [x^{-1}] চাপতে হবে। এরপর [=] বাটন চাপলে A ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্স A^{-1} পাওয়া যাবে।



কার্সরটিকে উঠা-নামা করালে সংশ্লিষ্ট মানটি ভগ্নাংশ আকারে প্রদর্শিত হবে।

(Key log- [MENU] [4] [1] [4] [4] [1] [=] [2] [=] [3] [=] [4] [=] [5] [=] [1] [=] [6] [=] [7] [=] [8] [=] [9] [=] [1] [=] [1] [0] [=] [1] [1] [=] [1] [2] [=] [1] [3] [=] [1] [4] [=] [AC] [OPTN] [▼] [2] [OPTN] [3] [)] [=] [OPTN] [3] [x^{-1}] [=])

উল্লেখ্য, এক্ষেত্রে ম্যাট্রিক্সটির নির্ণায়কের মান বের করার কোনো প্রয়োজন নেই। ম্যাট্রিক্সটির বিপরীত ম্যাট্রিক্স যে পাওয়া যাবে তা দেখানোর জন্যই নির্ণায়কের মান বের করা হয়েছে।

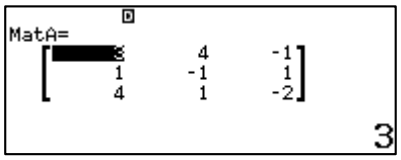
৩. $3x + 4y - z = 15$
$x - y + z = 0$
$4x + y - 2z = 17$

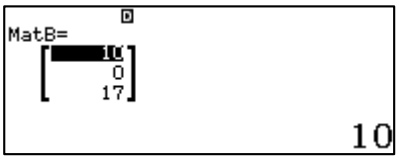
সরল সহসমীকরণ জোটের সমাধান বের করতে হবে।

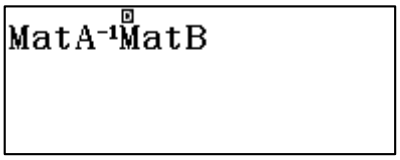
সমাধান- উক্ত সরল সহসমীকরণ জোটকে ম্যাট্রিক্স আকারে প্রকাশ করলে হবে, $AX = B$ যেখানে,

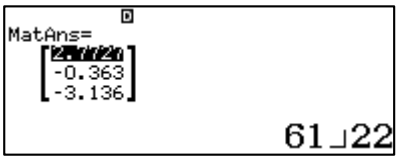
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 17 \end{bmatrix}$$

ম্যাট্রিক্স সমীকরণটি সমাধানের জন্য A^{-1} ও B কে গুণ করতে হবে। এজন্য প্রথমে $Mat\ A$ তে ম্যাট্রিক্স A ও $Mat\ B$ তে ম্যাট্রিক্স B প্রবেশ করাতে হবে। এরপর OPTN menu হতে Mat A ও Mat B নির্বাচন করে তৃতীয় স্ক্রিনের মতো টাইপ করে = চাপলে ফলাফল পাওয়া যাবে।









(Key log- MENU 4 1 3 3 3 = 4 = − 1 = 1 = − 1 = 1 = 4 = 1 = − 2 = AC OPTN 1 2 3 1 1 0 = 0 = 1 7 = AC OPTN 3 x^{-1} 4 =)

অনুশীলনী-১০

১. নিচের ম্যাট্রিক্সগুলো লক্ষ্য কর-

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ $\qquad$ $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 9 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

$C = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$ $\qquad$ $D = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

ক্যালকুলেটরের সাহায্যে বের কর (বের করা না গেলে, কেন সম্ভব নয় ব্যাখ্যা কর)

(i) $5A$ (ii) $A + C$ (iii) AB (iv) CD (v) BD

(vi) A^2 (vii) A^{-1} (viii) C^6

২. (i) ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটির নির্ণায়কের মান বের কর।

(ii) Edit matrix ব্যবহার করে A ম্যাট্রিক্সটির ভগ্নাংশ উপাদানকে 3 দ্বারা প্রতিস্থাপন করে নতুন ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়কের মান বের কর।

৩. যদি $AX = B$ হয় তাহলে $X = A^{-1}B$. ক্যালকুলেটরে ম্যাট্রিক্স ব্যবহার করে নিচের সরল সহ সমীকরণগুলো সমাধান কর-

(i) $3x - 2y = 2$

$x + 5y = 29$

(ii) $1.2x - 4y = 0.62$

$1.6x - 2.8y = 1.46$

(iii) $x + 4y - z = -2$

$3x - y + 3z = 19$

$-2x + y + z = -7$

(iv) $3x - z + 4y = 15$

$z - y + x = 0$

$y + 4x - 2z = 17$

৪. হাসেম আলী লক্ষ্য করলো 4 কাপ কফি ও 3 কাপ চা এর জন্য মোট 26 টাকা খরচ হয় এবং 2 কাপ কফি ও 5 কাপ চা এর জন্য 27 টাকা খরচ হয়। ক্যালকুলেটরে Matrix ব্যবহার করে প্রতি কাপ কফি ও চা এর দাম কত হবে তা বের কর।

একাদশ অধ্যায়

ভেক্টর

(Vector)

স্কেলার এমন একটি রাশি যার শুধু মান আছে যেমন ভর, তাপমাত্রা ইত্যাদি। অপরদিকে ভেক্টর হলো গাণিতিক রাশি যার মান ও দিক উভয়ই আছে। নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যের একটি রেখা যা কোনো নির্দিষ্ট দিকমুখী যেমন একটি তীর চিহ্ন হলো ভেক্টরের সব থেকে সরল উদাহরণ। গণিত, বিজ্ঞান ও প্রকৌশল বিদ্যায় ভেক্টর ব্যাপকভাবে ব্যবহৃত হয়। এই অধ্যায়ে ClassWiz ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে নিম্নোক্ত বিষয়গুলো সম্পর্কে আলোচনা করা হবে-

- ভেক্টরের উপস্থাপন
- ভেক্টরের মান ও দিক নির্ণয়
- ভেক্টর বীজগণিত
- ভেক্টর ডট গুণফলের মান নির্ণয় ও
- ভেক্টর ক্রসগুণফলের মান নির্ণয়

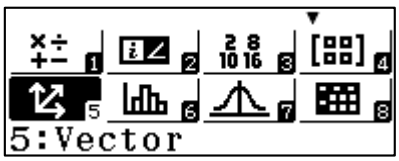
MENU 5 চেপে ভেক্টর *mode* নির্বাচন করে ভেক্টরের সকল হিসেব করা হয়।

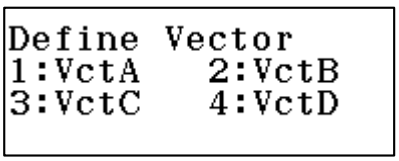
১১.১ ভেক্টরের উপস্থাপন

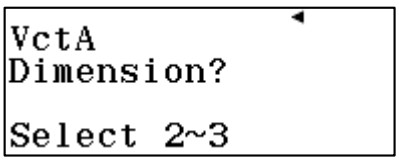
ভেক্টরকে বিভিন্নভাবে উপস্থাপন করা যায়। একটি ভেক্টর $\vec{A}$ কে সাধারণত $x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$ আকারে উপস্থাপন করা হয়। উক্ত ভেক্টরটিকে আবার 3×1 ম্যাট্রিক্স আকারে নিম্নোক্তভাবে উপস্থাপন করা যায়।

$$\vec{A} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

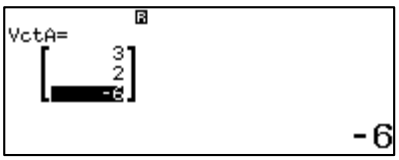
CASIO ClassWiz ক্যালকুলেটরে ভেক্টরকে একটি একক কলাম বিশিষ্ট ম্যাট্রিক্স আকারে বিবেচনা করা হয়েছে। এই ম্যাট্রিক্সটিকে বলা হয় 'সারি ভেক্টর' ক্যালকুলেটরে ভেক্টরকে সংখ্যাগত উপাদানগুলো দ্বারা উপস্থাপন করা হয়েছে। একটি ভেক্টর নির্ধারণ করার জন্য MENU 5 চেপে ভেক্টর *mode* নির্বাচন করার পর Vct A নির্ধারণ করতে 1 চাপতে হবে। তারপর ভেক্টরটির মাত্রা নির্দিষ্ট করতে হবে। 3 মাত্রা বিশিষ্ট ভেক্টর নির্ধারণ করার জন্য 3 চাপতে হবে।



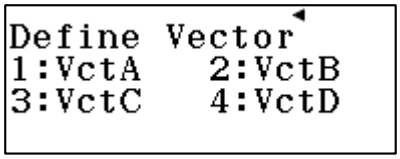


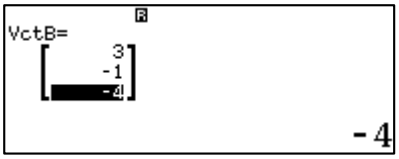


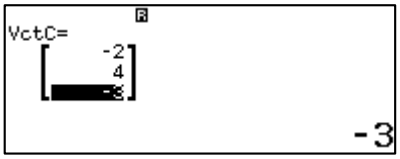
$A = 3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - 6\hat{k}$ ভেক্টরটি ক্যালকুলেটরে প্রবেশ করানোর জন্য ভেক্টরটির উপাদানগুলো যা এক্ষেত্রে $3, 2$ ও -6 প্রবেশ করাতে হবে। প্রত্যেকটি উপাদান প্রবেশ করানোর পর = বাটন চাপতে হবে। স্ক্রিনে ভেক্টর $\boldsymbol{A}$ কে $VctA = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix}$ আকারে দেখাবে।



ক্যালকুলেটরে সর্বোচ্চ চারটি ভেক্টর প্রবেশ করানো যাবে। অন্যান্য ভেক্টর নির্ধারণ করার জন্য [OPTN] চাপার পর [1] চাপতে হবে। নিচের স্ক্রিনে $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}$ ও $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$ প্রবেশ করিয়ে দেখানো হলো।







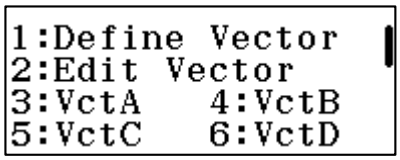
অর্থাৎ $\boldsymbol{B} = 3\hat{\imath} - \hat{\jmath} - 4\hat{k}$ ও $\boldsymbol{C} = -2\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} - 3\hat{k}$

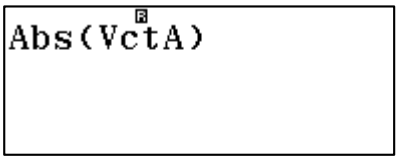
প্রত্যেক বার নতুন ভেক্টর প্রবেশ করানোর জন্য [OPTN] [1] চেপে Define Vector স্ক্রিনে আসতে হবে।

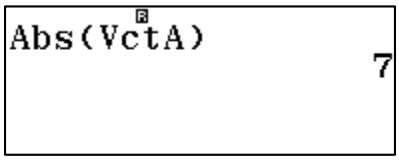
১১.২ ভেক্টরের মান ও দিক

কোনো ভেক্টরের মান নির্ণয়ের জন্য ভেক্টরটির উপাদানগুলোর বর্গের যোগফলকে বর্গমূল করতে হয়। আর ভেক্টরের মানকে প্রকাশ করার জন্য মডুলাস চিহ্ন ব্যবহার করা হয়। যেমন $\boldsymbol{A}$ ভেক্টরের মান $|\boldsymbol{A}|$ দ্বারা নির্দেশ করা হয়। অর্থাৎ $|\boldsymbol{A}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad = \sqrt{3^2 + 2^2 + (-6)^2} = 7$

ClassWiz ক্যালকুলেটরে ভেক্টরের মান বের করার জন্য [SHIFT] [(] চেপে [Abs] নির্দেশনা ব্যবহার করা হয়। যা সরাসরি ভেক্টরের মান প্রদর্শন করবে। $\boldsymbol{A}$ ভেক্টরটির মান বের করতে হলে [SHIFT] [(] চেপে [Abs] নির্বাচন করে [OPTN] menu থেকে [3] চেপে vct A নির্বাচন করতে হবে। এরপর [)] চেপে [=] চাপলেই $\boldsymbol{A}$ ভেক্টরের মান পাওয়া যাবে যা নিচের স্ক্রিনে দেখানো হলো-

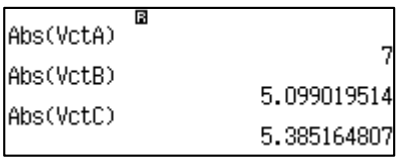






উপরের সর্বশেষ স্ক্রিন থেকে দেখা যাচ্ছে $\boldsymbol{A}$ ভেক্টরের মান হলো 7

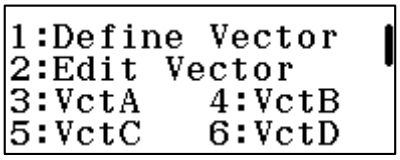
SET UP মেনু ব্যবহার করে Multiline font ব্যবহার করে অনেকগুলো ফলাফল একসাথে দেখা যায়।

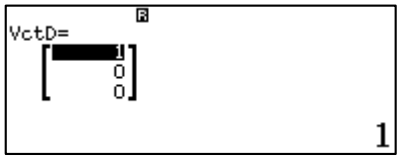


কোনো ভেক্টরের দিক বলতে সাধারণত ঐ ভেক্টরটি x অক্ষের সাথে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে যে কোনো উৎপন্ন করে তার মানকে বুঝায়। x অক্ষকে একটি একক ভেক্টর $\hat{\imath}$ দ্বারা নির্দেশ করা হয়। সুতরাং x অক্ষের সারি ভেক্টর হবে $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$।

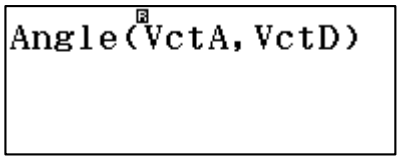
সুতরাং কোনো ভেক্টরের দিক নির্ণয়ের জন্য x অক্ষের সাথে ঐ ভেক্টরের কোণ নির্ণয় করাই যথেষ্ট। আর সেজন্য [OPTN]

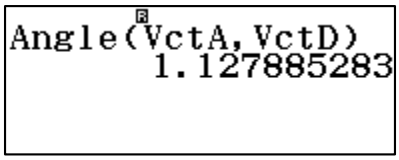
menu থেকে Angle নির্দেশনা ব্যবহার করতে হয়। উদাহরণস্বরূপ $\boldsymbol{A}$ ভেক্টরের দিক নির্ণয়ের জন্য প্রথমে x অক্ষের সারি ভেক্টর Vct D আকারে প্রবেশ করাতে হবে। সেজন্য [OPTN] menu ব্যবহার করতে হয়।





এরপর [OPTN] menu চেপে [▼] বাটন চাপতে হবে। এরপর [3] চেপে Angle নির্বাচন করতে হবে। এরপর [OPTN] menu থেকে Vct A নির্বাচন করে [SHIFT] [)] চেপে কমা (,) দেয়ার পর পুনরায় [OPTN] menu থেকে x অক্ষের সারি ভেক্টর অর্থাৎ vct D নির্বাচন করতে হবে। অতঃপর [)] চেপে বন্ধনি চিহ্ন দিয়ে [=] চাপলে $\boldsymbol{A}$ ভেক্টরের দিক পাওয়া যাবে।

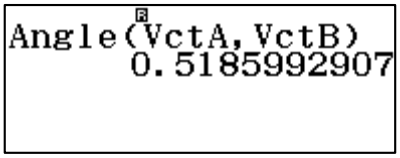


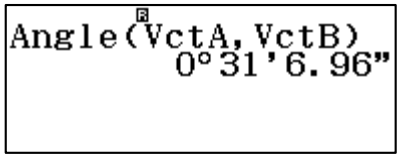


উল্লেখ্য যে, কোণের প্রাপ্ত মানটি দশমিক সংখ্যায় প্রদর্শিত হয়েছে, ডিগ্রীতে ফলাফল পাওয়ার জন্য [°'"] বাটন চাপতে হবে।

y অক্ষের সাথে ভেক্টরের দিক নির্ণয়ের জন্য অনুরূপভাবে y অক্ষের সারি ভেক্টর $\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ ও z অক্ষের সাথে দিক নির্ণয়ের জন্য z অক্ষের সারি ভেক্টর $\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ ব্যবহার করতে হয়।

আবার দুটি ভেক্টরের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয়ের জন্য একই পদ্ধতি ব্যবহার করা যায়। নিচে A ও B ভেক্টরের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় করে দেখানো হলো।

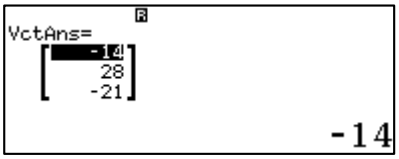




১১.৩ ভেক্টর বীজগণিত

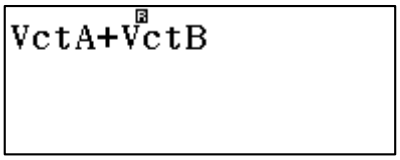
ভেক্টরের মান ও দিক নির্ণয় ছাড়াও ভেক্টরের আরও বিভিন্ন রকম গাণিতিক কাজ ClassWiz এর মাধ্যমে করা সম্ভব।

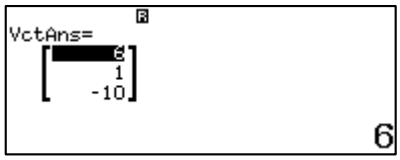
স্কেলার রাশি দ্বারা কোনো ভেক্টরকে গুণ করার জন্য ভেক্টরটির প্রতিটি উপাদানকে ঐ স্কেলার দ্বারা গুণ করতে হয়। যেমন $7C$ ভেক্টরটি বের করার জন্য 7 চেপে [OPTN] menu থেকে Vct C নির্বাচন করে [=] বাটন চাপলে ফলাফল প্রদর্শিত হবে। যা নিচে দেখানো হলো।



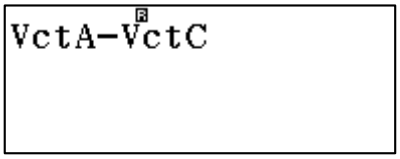
এখানে $\boldsymbol{C}$ ভেক্টরটির প্রত্যেকটি উপাদানকে 7 দ্বারা গুণ করা হয়েছে।

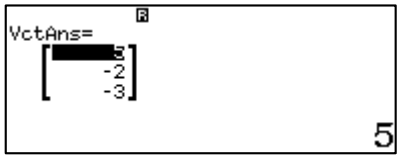
দুইটি ভেক্টরের যোগফল করার জন্য ভেক্টরদ্বয়ের উপাদানগুলো যোগ করতে হয়। তবে সে জন্য দুটি ভেক্টর সমান মাত্রার হতে হবে অর্থাৎ ভেক্টরদ্বয়ের উপাদান সংখ্যা সমান হতে হবে। ClassWiz ক্যালকুলেটরে সরাসরি দুটি ভেক্টরের যোগফল বের করা যায়। যা নিচের স্ক্রিনে দেখানো হলো।





ভেক্টরের বিয়োগ করার জন্য দ্বিতীয় ভেক্টরটির বিপরীত ভেক্টর প্রথম ভেক্টরের সাথে যোগ করতে হয়। কিন্তু ক্যালকুলেটরে সরাসরি দুটি ভেক্টরের বিয়োগফল বের করা যায়। A ও C ভেক্টর দুটির বিয়োগ নিচে দেখানো হলো-



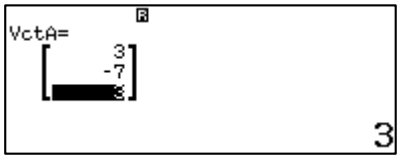


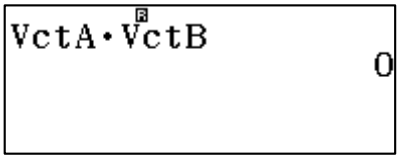
১১.৪ ভেক্টরের ডট গুণন

ভেক্টরের ডট গুণনকে অনেক সময় স্কেলার গুণনও বলা হয়ে থাকে কেননা দুটি ভেক্টরের ডটগুণন সবসময় একটি স্কেলার রাশি হয়। দুইটি ভেক্টরের ডট গুণনকে নিম্নোক্তভাবে প্রকাশ করা হয়-

$$\boldsymbol{A}.\boldsymbol{B} = |\boldsymbol{A}|\ |\boldsymbol{B}|\ cos\theta$$

যেখানে θ হলো ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ। দুটি ভেক্টরের ডটগুণন করার জন্য ভেক্টর দুটির সংশ্লিষ্ট উপাদানগুলোকে গুণ করে গুণফলগুলো যোগ করতে হয়। CASIO ClassWiz ক্যালকুলেটরে ডট গুণন করার জন্য Dot Product নামে একটি বিশেষ নির্দেশনা রয়েছে। যা OPTN menu ব্যবহার করে বের করা যায়। উদাহরণস্বরূপ, ধরা যাক, দুটি ভেক্টর $\boldsymbol{A} = 3\hat{\imath} - 7\hat{\jmath} + 3\hat{k}$ ও $\boldsymbol{B} = 5\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + 2\hat{k}$ ভেক্টর দুটির ডট গুণন করার জন্য প্রথমে ভেক্টরদ্বয়ের সারি ভেক্টর $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \\ 3 \end{bmatrix}$ ও $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ ক্যালকুলেটরে A ও B ভেক্টর হিসেবে প্রবেশ করাতে হবে। এরপর OPTN menu এর দ্বিতীয় স্ক্রিন থেকে 2 চেপে Dot Product নির্বাচন করতে হবে। এরপর Vct B নির্বাচন করে = চাপলে ভেক্টরদ্বয়ের ডটগুণনের মান পাওয়া যাবে। যা নিচে দেখানো হলো-





লক্ষণীয়যে, $\boldsymbol{A}.\boldsymbol{B}$ এর প্রাপ্ত মান শূন্য। যা নির্দেশ করছে যে ভেক্টর দুটি পরস্পর লম্ব। কারণ

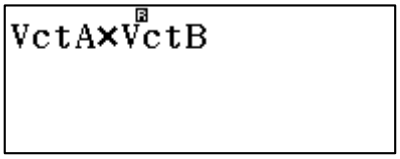
$$\boldsymbol{A}.\boldsymbol{B} = AB\ cos\theta = 0$$

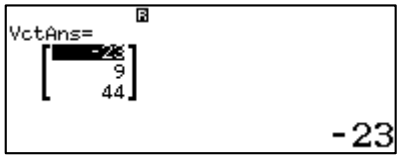
$$\theta = 90°$$

১১.৫ ক্রস গুণন

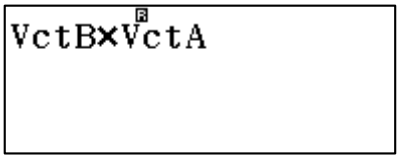
দুটি ভেক্টরের মধ্যে আরেক প্রকার গুণ সম্ভব আর তা হলো ক্রস গুণন। দুটি ভেক্টরের মান ও এদের মধ্যবর্তী কোণের সাইন এর গুণফলকে ভেক্টর দুটির ক্রস গুণন বলে। ভেক্টর গুণন হলো একটি ভেক্টর রাশি যা ভেক্টর দুটি যে সমতোলে অবস্থিত তার সাথে লম্বভাবে অবস্থান করবে।

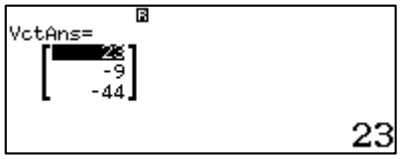
উপরের $\boldsymbol{A}$ ও $\boldsymbol{B}$ ভেক্টরদ্বয়ের ক্রসগুণন $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ ClassWiz ক্যালকুলেটরে সাধারণ গুণচিহ্ন ([×]) ব্যবহার করে সরাসরি করা যায় যা নিচে দেখানো হলো-





ডট গুণন বিনিময় সূত্র মেনে চলে কিন্তু ক্রস গুণন বিনিময় সূত্র মেনে চলে না। নিচের স্ক্রিন হতে দেখা যাচ্ছে যে যদি ভেক্টরদ্বয়ের ক্রস পরিবর্তন করা হয় তাহলে প্রাপ্ত ফলাফল পূর্বের ফলাফলের বিপরীত হবে।

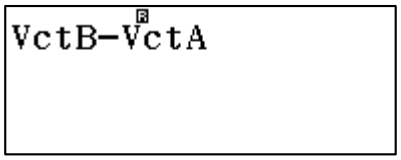


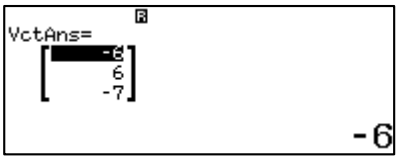


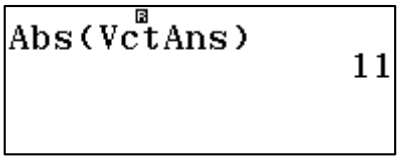
উদাহরণমালা

১. মূলবিন্দু 0 এর সাপেক্ষে দুইটি বিন্দুর স্থানাংক $A(2,-1,7), B\ (-4,5,0)$ হলে $|\overrightarrow{AB}|$ নির্ণয় করতে হবে।

সমাধান- [MENU] [5] চেপে vector *mode* নির্বাচন করে $\boldsymbol{A}$ ভেক্টরকে প্রবেশ করাতে হবে। এরপর [OPTN] বাটন চাপার পর [1] চেপে Define Vector নির্বাচন করতে হবে। এরপর [2] চেপে $\boldsymbol{B}$ ভেক্টরকে প্রবেশ করাতে হবে। আবার [OPTN] চাপার পর [4] চেপে $\boldsymbol{B}$ ভেক্টর এবং [−] চাপার পর [OPTN] [3] চেপে $\boldsymbol{A}$ ভেক্টরকে নিচের প্রথম স্ক্রিনের মতো টাইপ করতে হবে। এরপর [=] চাপলে $\overrightarrow{AB}$ ভেক্টর পাওয়া যাবে। অতঃপর [SHIFT] [(] ([Abs]) চাপতে হবে। সবশেষে [=] চাপলে Vct Ans ক্যালকুলেটরে প্রদর্শিত হবে এবং [=] চাপলে $\overrightarrow{AB}$ ভেক্টরের মান পাওয়া যাবে।



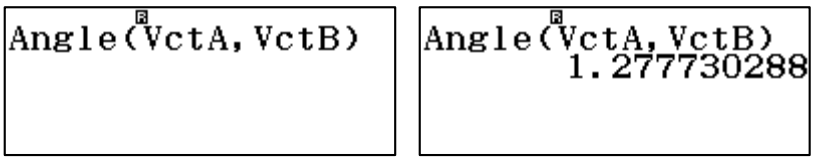




(Key log- [MENU] [5] [1] [3] [2] [=] [−] [1] [=] [7] [=] [OPTN] [1] [2] [3] [−] [4] [=] [5] [=] [0] [=] [AC] [OPTN] [4] [−] [OPTN] [3] [=] [SHIFT] [(] [OPTN] [▼] [1] [)] [=])

২. $\boldsymbol{A} = 2\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + \hat{k}$ এবং $\boldsymbol{B} = 2\hat{\imath} + 10\hat{\jmath} - 11\hat{k}$ এর মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় করতে হবে।

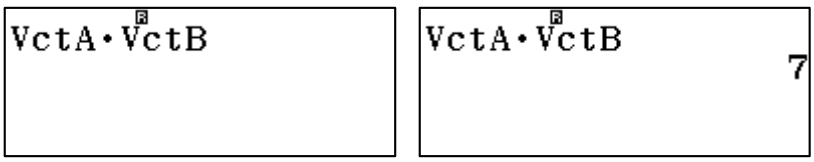
সমাধান- [MENU] [5] চেপে vector *mode* নির্বাচন করার পর $\boldsymbol{A}$ ও $\boldsymbol{B}$ ভেক্টরকে প্রবেশ করাতে হবে। এরপর [OPTN] বাটন চাপার পর [▼] চেপে দ্বিতীয় স্ক্রিনে গিয়ে Angle নির্বাচন করতে হবে। আবার [OPTN] চেপে Vector A ও তারপর কমা ([SHIFT] [)]) দিয়ে Vector B প্রবেশ করিয়ে [=] চাপলে $\boldsymbol{A}$ ও $\boldsymbol{B}$ ভেক্টরের মধ্যবর্তী কোণ পাওয়া যাবে।



(Key log- MENU 5 1 3 2 = 2 = 1 = OPTN 1 2 3 2 = 1 0 = − 1 1 = AC OPTN ▼ 3 OPTN 3 SHIFT) OPTN 4) =)

৩. $(2, 3, 1)$ এবং $(3, 1, -2)$ ভেক্টর দুইটির স্কেলার গুণফল নির্ণয় করতে হবে।

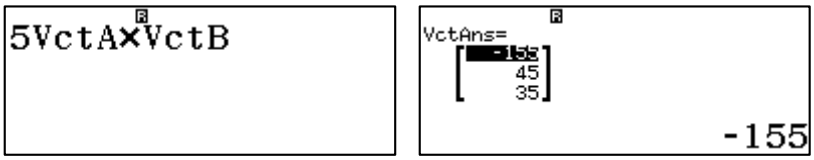
সমাধান- MENU 5 চেপে vector *mode* এ গিয়ে প্রথমে ভেক্টর দুটিকে A ও B তে প্রবেশ করাতে হবে। এরপর OPTN চেপে প্রথমে vct A নির্বাচন করতে হবে এবং আবার OPTN চেপে দ্বিতীয় স্ক্রিনে গিয়ে Dot Product নির্বাচন করতে হবে। সবশেষে আবার OPTN চেপে Vct B নির্বাচন করে = চাপলে ভেক্টর দুইটির ডটগুণনের মান পাওয়া যাবে।



(Key log- MENU 5 1 3 2 = 3 = 1 = OPTN 1 2 3 3 = 1 = − 2 = AC OPTN 3 OPTN ▼ 2 OPTN 4 =)

৪. $\boldsymbol{A} = 2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + 5\hat{k}$ এবং $\boldsymbol{B} = -\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - 7\hat{k}$ হলে $5\vec{A} \times \vec{B}$ এর মান বের করতে হবে।

সমাধান- MENU 5 চেপে vector *mode* নির্বাচন করে $\boldsymbol{A}$ ও $\boldsymbol{B}$ ভেক্টরকে যথাক্রমে vct A ও vct B তে প্রবেশ করাতে হবে। এরপর নিচের প্রথম স্ক্রিনের মতো টাইপ করে = চাপলে ক্রস গুণফল পাওয়া যাবে।

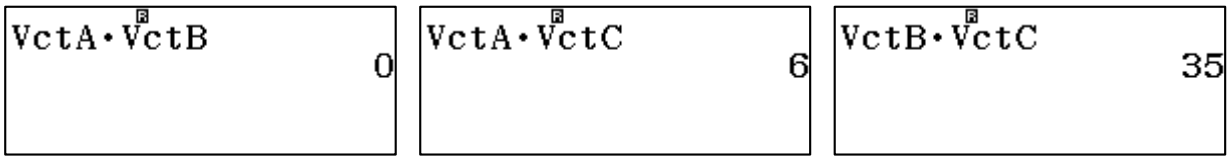


(Key log- MENU 5 1 3 2 = 3 = 5 = OPTN 1 2 3 − 1 = 2 = − 7 = AC 5 OPTN 3 × OPTN 4 =)

সুতরাং ফলাফল হবে $5\vec{A} \times \vec{B} = -155\hat{\imath} + 45\hat{\jmath} + 35\hat{k}$.

৫. প্রমাণ করতে হবে যে, $2\hat{\imath} - \hat{\jmath} + \hat{k}$, $\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} - 5\hat{k}$ এবং $3\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} - 4\hat{k}$ ভেক্টরত্রয় একটি সমকোণী ত্রিভুজ উৎপন্ন করে।

সমাধান- Vector *mode* নির্বাচন করার পর প্রথমে ভেক্টর তিনটিকে যথাক্রমে Vet A, Vct B ও Vct C তে প্রবেশ করাতে হবে। এরপর OPTN ব্যবহার করে দুইটি করে ভেক্টরের ডটগুণন নিয়ে নিচের মতো করে দেখতে হবে।



যেহেতু Vct A ও Vct B এর গুণফল শূন্য অর্থাৎ **A** ও **B** পরস্পর লম্ব। সুতরাং ভেক্টরত্রয় একটি সমকোণী ত্রিভুজ গঠন করে

(Key log- MENU 5 1 3 2 = − 1 = 1 = OPTN 1 2 3 1 = − 3 = − 5 = OPTN 1 3 3 3 = − 4 = − 4 = AC OPTN 3 OPTN ▼ 2 OPTN 4 = ◀ DEL OPTN 5 = ◀ ◀ ◀ DEL OPTN 4 =)

অনুশীলনী-১১

১। $\underline{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \underline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ এবং $\underline{c} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}$ ক্যালকুলেটরে প্রবেশ করাও। নিচের মানগুলো বের কর-

(ক) (i)$3\underline{b}$ (ii)$-2\underline{c}$ (iii)$10\underline{a} + 2\underline{b}$

(খ) (i)$|\underline{a}|$ (ii)$|\underline{b}|$ (iii)$|\underline{a} - \underline{c}|$ (iv)$\left|\frac{1}{2}\underline{a}\right|$ (v) $|-3\underline{c}|$

(গ) (i)$\underline{a} + \underline{b}$ (ii)$\underline{b} - \underline{c}$ (iii)$4\underline{c} - \underline{b}$

২। $\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ ভেক্টর এবং ভূমির মধ্যকার সুক্ষ্মকোণ বের কর।

৩। 8 একক দৈর্ঘ্য এবং ভূমির সাথে $20°$ কোণে অবস্থিত একটি ভেক্টরের আনভূমিক ও উলম্ব উপাংশ বের কর।

৪।(ক) $\underline{a} = \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \end{bmatrix}$ এর জন্য $|\underline{a}|$ বের কর।

(খ) ভেক্টরটিকে সম্পাদনা করে $\underline{a} = \begin{bmatrix} 12 \\ 5 \end{bmatrix}$ বানাতে হবে এবং $|\underline{a}|$ বের কর।

(গ) ভেক্টরটিকে পুনরায় সম্পাদনা করে তিনমাত্রার অর্থাৎ $\underline{a} = \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \\ 0 \end{bmatrix}$ বানাও এবং $|\underline{a}|$ বের কর।

(ঘ) ত্রিমাত্রিক ভেক্টরটিকে সম্পাদনা করে $\underline{a} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 12 \end{bmatrix}$ বানাও এবং $|\underline{a}|$ বের কর।

৫। ধরা যাক, $\underline{u} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$ এবং $\underline{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix}$ এই মানগুলো ক্যালকুলেটরে প্রবেশ করিয়ে নিচের রাশিগুলোর মান বের কর-

(i) $\underline{u} \cdot \underline{v}$ (ii) $\underline{u} \times \underline{v}$ (iii) $\underline{u}$ ও $\underline{v}$ এর মধ্যবর্তী কোণ কত?

৬। করিম স্থির পানিতে ঘন্টায় 3 কি.মি./ঘন্টা বেগে সাঁতার কাটে। স্রোতের বেগ যদি ঘন্টায় 1 কি.মি./ঘন্টা হয় তাহলে (i) স্রোতের বিরুদ্ধে (ii) স্রোতের সাথে $90°$ কোণে করিমের লব্ধি বেগের মান বের কর।

৭। ধরা যাক, $\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ ও $= \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

(ক) $\boldsymbol{P} \times \boldsymbol{Q}$ (খ)গঠিত সামন্তরিকের ক্ষেত্রফল কত?

৮। $\underline{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}$ ও $\underline{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix}$

দ্বাদশ অধ্যায়

ক্যালকুলাস
(Calculus)

কোনো কিছুর নিরবিচ্ছিন্ন পরিবর্তনের গাণিতিক অধ্যয়নই হলো ক্যালকুলাস।

- গণিত, সংখ্যা নিয়ে কাজ করে যেমন সংখ্যার যোগ, বিয়োগ, গুণ, ভাগ ইত্যাদি।
- বীজগণিত সংখ্যার ভিতরে প্যাটার্ন খুঁজে বের করার চেষ্টা করে যেমন $a^2 + b^2 = c^2$ একটি গুরুত্বপূর্ণ সমীকরণ যা সমকোণী ত্রিভূজের বাহুগুলির মাঝে সম্পর্ক নির্দেশ করে। বীজগণিতের মাধ্যমে সমস্ত সংখ্যার সেট পাওয়া সম্ভব যা ঐ সম্পর্ক মেনে চলে, - যদি a ও b জানা থাকে তাহলে c এর মান সহজেই বের করা যাবে।
- আর ক্যালকুলাস সমীকরণ সমূহের প্যাটার্ন খুঁজে বের করার চেষ্টা করে। ক্যালকুলাস ব্যবহার করে সমীকরণ সংক্রান্ত নিমোক্ত সকল প্রশ্নের উত্তর দেয়া সম্ভব।
    - কিভাবে সময়ের সাথে সাথে একটি সমীকরণের মান বৃদ্ধি পায় বা হ্রাস পায়
    - কখন এটি তার সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন মানে পৌঁছায়?
    - কিভাবে চলক ব্যবহার করতে হবে যখন তারা নিরবিচ্ছিন্ন ভাবে পরিবর্তিত হতে থাকে (যেমন তাপ, গতি, জনসংখ্যা..... ইত্যাদি) এবং আরও অনেক কিছু।

বীজগণিত ও ক্যালকুলাস হলো সমস্যা সমাধানের জন্য মানিকজোড় স্বরূপ; ক্যালকুলাস নতুন নতুন সমীকরণ খুঁজে বের করে আর বীজগণিত তার সমাধান করে।

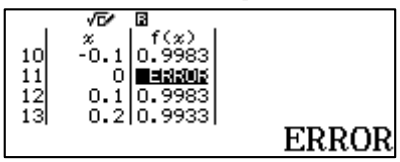
ClassWiz ক্যালকুলেটরের মাধ্যমে প্রাথমিক ক্যালকুলাসের বেশ কিছু দিক উপস্থাপন ও পর্যবেক্ষণ করা যায়। Calculate ও Table *mode* ব্যবহার করে ক্যালকুলাসের পর্যবেক্ষণ ও ফাংশনের বিভিন্ন বিষয় সম্পর্কে সম্যক ধারণা লাভ করা যায়। ক্যালকুলেটরটিকে ইনপুট, আউটপুটের জন্য Math *mode* এ রাখতে হবে।

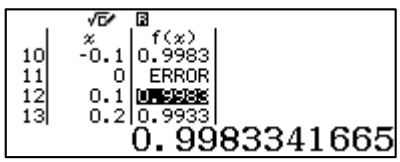
১২.১ লিমিট

লিমিট ক্যালকুলাসের সবচেয়ে প্রাথমিক ধারণা। এর মাধ্যমেই অন্তরীকরণ ও যোগজীকরণের ব্যাখ্যা দেওয়া যায়। মানের তালিকা ব্যবহার করে কোনো ফাংশনের লিমিটের মান, বিশ্লেষণ করা যায়। উদাহরণস্বরূপ, একটি লিমিট নেওয়া হলো।

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$$

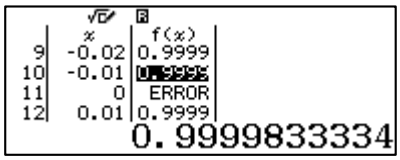
লক্ষণীয়যে, $x = 0$ এর জন্য হর এবং লব উভয়ই 0 হবে অর্থাৎ ফাংশনটি $\frac{0}{0}$ আকারের যা অনির্ণেয়। এই লিমিট বিশ্লেষণের জন্য একটি মানের তালিকা প্রস্তুত করা হলো যেখানে x এর মানগুলো 0 এর কাছাকাছি নেওয়া হয়েছে। লক্ষ্য রাখতে হবে ক্যালকুলেটর যেন Radian *mode* এ থাকে। Table *mode*- এ $f(x)$ এর মান হিসেবে ফাংশনটি প্রবেশ করাতে হবে এবং $Start, End$ এবং $Step$ মান হিসেবে যথাক্রমে $-1{,}1$ ও 0.1 নিতে হবে।

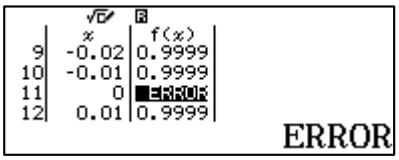


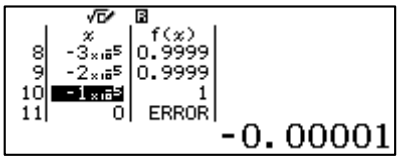


উপরের স্ক্রিন হতে দেখা যায় যে $x = 0$ এর জন্য ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত নয়, কিন্তু এর মান শূন্য এর নিকটবর্তী হলে ফাংশনটির মান 1 এর নিকটবর্তী হবে।

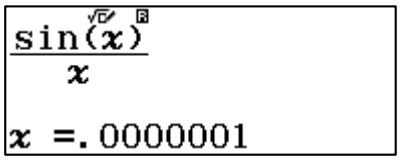
লিমিটের অবস্থা আরও ভালভাবে পর্যবেক্ষণ করার জন্য আরও ছোট ব্যবধি নিলে দেখা যাবে যে x এর মান শূন্য এর আরও নিকটবর্তী হতে থাকলে ফাংশনের মান 1 এর আরও নিকটবর্তী হতে থাকবে। লক্ষণীয়যে প্রতিটি তালিকায় $f(0)$ এর জন্য Error প্রদর্শিত হয়েছে। প্রকৃতপক্ষে সর্বশেষ স্ক্রিনে মানের তালিকায় $f(x) = 1$ প্রদর্শিত হয়েছে। কেননা আসন্ন মানটি 1 .

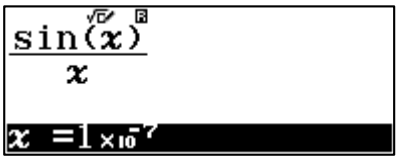


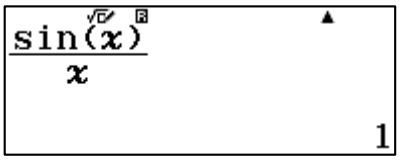




উপরের লিমিটের মান বের করার জন্য আরো একটি সহজ পদ্ধতি অবলম্বন করা যায়। যেহেতু $x \to 0$,দ্বারা x এর মান শূন্য এর কাছাকাছি মানকে নির্দেশ করে, অতএব x এর মান $.0000001$ এর জন্য ফাংশনের মান 1 পাওয়া যায়। যা $CALC$ প্রোসেস ব্যবহার করে করা যায়, এটি নিচে দেখানো হলো-



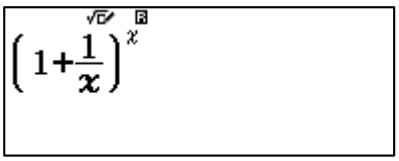




অসীম লিমিট যুক্ত ফাংশনের মান ও $ClassWiz$ এর মাধ্যমে খুব সহজেই বের করা যায়। যেহেতু কোনো ফাংশনে অসীম মান প্রবেশ করানো সম্ভব নয় তাই শুধুমাত্র আসন্ন মান পাওয়া সম্ভব। উদাহরণস্বরূপ একটি ফাংশন-

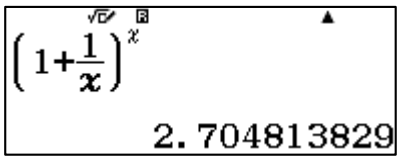
$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

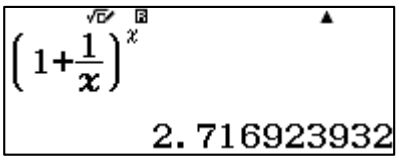
x এর অসীম মানের জন্য ফাংশনটির সীমার মান পর্যবেক্ষণ করতে [MENU] [1] চেপে Calculate *mode* নির্বাচন করতে হবে। এরপর নিচের স্ক্রিনের মতো করে ফাংশনটি টাইপ করতে হবে। ([=] বাটন চাপা যাবেনা।)

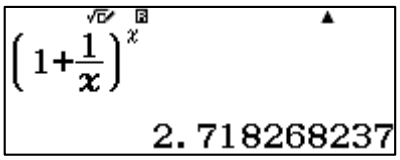


x এর অসীম মানের জন্য [CALC] নির্দেশনা ব্যবহার করে x এর একটি বড় মান প্রবেশ করিয়ে [=] বাটন চাপতে হবে। x এর আরও অন্যান্য মান প্রবেশ করিয়ে পর্যবেক্ষণ করার জন্য পুনরায় [CALC] বাটন চাপতে হবে।

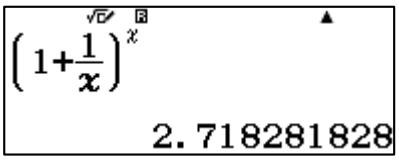
x এর আরও বড় মান নিয়ে বেশ কয়েকবার এই প্রক্রিয়ার পুনরাবৃত্তি করলে সীমার মান সম্পর্কে ধারণা পাওয়া যায়। নিচে $x = 100, x = 1000$ এবং $x = 100\,000$ এর জন্য ফাংশনের প্রাপ্ত মানের স্ক্রিন দেখানো হলো





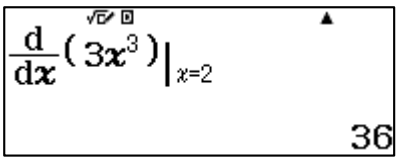


যদিও ক্যালকুলেটরের স্ক্রিনের আকারে সীমাবদ্ধতা আছে তবু এই পদ্ধতি অবলম্বন করে ফাংশনের সীমার মান সম্পর্কে ভাল ধারণা লাভ করা যায়। এক্ষেত্রে $x = 10\,000\,000\,000$ ফাংশনের সীমা সম্পর্কে ভাল ধারণা প্রদান করে। যদিওবা সীমার মান বের করার জন্য গাণিতিক প্রমাণের প্রয়োজন এবং দশ বিলিয়ন সংখ্যাটি ∞ এর তুলনায় নেহায়েতই ছোট কিন্তু ক্যালকুলেটর এই পদ্ধতিতে আসন্ন মান প্রদর্শনে সক্ষম।

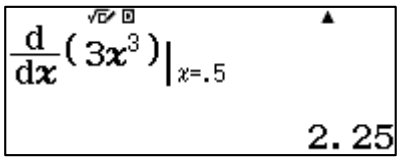


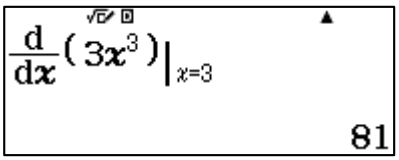
১২.২ ফাংশনের অন্তরীকরণ

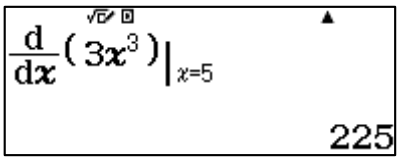
অন্তরীকরণ হলো কোনো ফাংশনের অন্তর্গত চলকের সাপেক্ষে ফাংশনটির পরিবর্তনের হার। যখন পরিবর্তনের হার ধ্রুবক থাকে না তখন অন্তরীকরণের প্রয়োজন হয়। কেননা, অন্তরীকরণ কীভাবে একটি ফাংশনের পরিবর্তন ঘটে তার ব্যাখ্যা দেয়। ClassWiz ক্যালকুলেটরের মাধ্যমে সরাসরি অন্তরীকরন করা না গেলেও নির্দিষ্ট মানের জন্য অন্তরকের মান সাংখ্যিকভাবে বের করা যায়। এজন্য ক্যালকুলেটরে একটি অন্তরীকরণ বাটন ($\frac{d}{dx}$) রয়েছে যা SHIFT চেপে পাওয়া যায়। $f(x) = 3x^2$ এর অন্তরকের মান $x = 2$ বিন্দুতে বের করার জন্য প্রথমে MENU 1 চেপে Calulate *mode* নির্বাচন করতে হবে। এরপর SHIFT চাপতে হবে। অতঃপর ফাংশনটি অর্থাৎ $3x^3$ টাইপ করে কী চেপে x এর মান হিসেবে 2 প্রবেশ করাতে হবে। এরপর = বাটন চাপলে নিচের মতো ফলাফল পাওয়া যাবে।



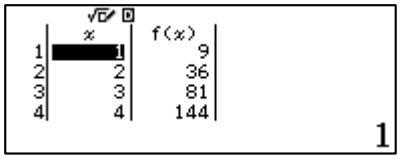
অন্যান্য বিন্দুতে ফাংশনটির অন্তরকের মান বের করার জন্য ◀ কী ব্যবহার করে সঠিকভাবে নির্দেশনাটি সম্পাদন করে খুব সহজেই বিভিন্ন বিন্দুর জন্য মান বের করা যায়। নিচে কিছু উদাহরণ দেখানো হলো-

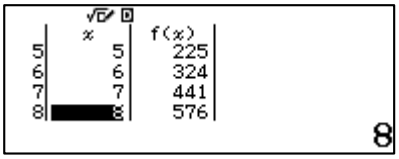


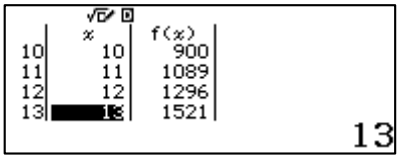




কিভাবে ফাংশনের মান পরিবর্তিত হয় তা অন্তরকের মাধ্যমে খুব সহজেই অনুধাবন করা যায়। এক্ষেত্রে x এর মান বৃদ্ধির সাথে সাথে অন্তরকের মান বৃদ্ধি পাচ্ছে অর্থাৎ $f(x)$ এর মান বৃদ্ধি প্রাপ্ত হচ্ছে। অর্থাৎ ফাংশনটির লেখচিত্রের ঢাল উর্ধ্বমুখি। মানের তালিকা ব্যবহার করে অন্তরকের মান পর্যবেক্ষণ করা সুবিধাজনক। যা নিচে দেখানো হলো।



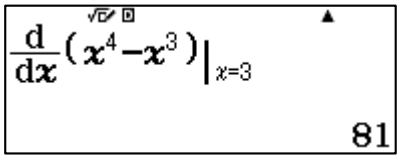


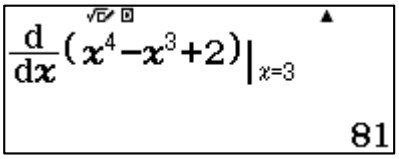


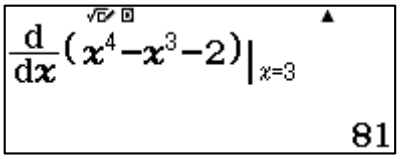
১২.৩ অন্তরকের বৈশিষ্ট্য

অন্তরকের বিভিন্ন বৈশিষ্ট্য সাংখ্যিকভাবে পর্যবেক্ষণের জন্য derivative নির্দেশনা ব্যবহার করা যায়।

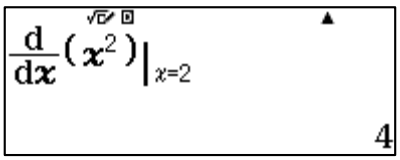
উদাহরণস্বরূপ, কোনো ফাংশনের সাথে ধ্রুবক যোগ করলে তার অন্তরকের মানের কোনো পরিবর্তন হয় না। $x = 3$ বিন্দুতে $f(x) = x^4 - x^3$ এর অন্তরকের মান ফাংশনটির সাথে কোনো ধ্রুবকের সংযোগে পরিবর্তিত হয় না।

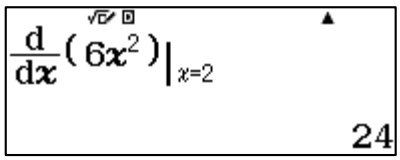






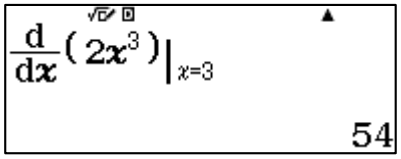
অন্যদিকে, একটি ফাংশনকে একটি ধ্রুবক দিয়ে গুণ করলে অন্তরকের মান পরিবর্তিত হয়। উদাহরণস্বরূপ, নিচের স্ক্রিনে $f(x) = x^2$ এবং ফাংশনটিকে 6 দ্বারা গুণ করে নতুন ফাংশন $f(x) = 6x^2$ এর অন্তরকের মান একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে দেখানো হয়েছে-

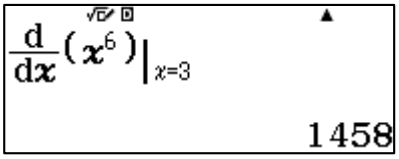


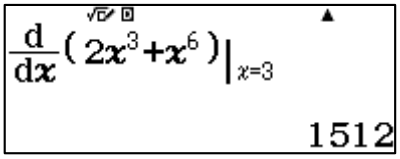


এক্ষেত্রে $6 \times 4 = 24$ থেকে অন্তরকের বৈশিষ্ট্য বোঝা যায়। 6 এর পরিবর্তে অন্য যেকোনো ধ্রুবক এবং 2 এর পরিবর্তে অন্য যেকোনো বিন্দুর জন্য এটি সত্য।

অনুরূপভাবে, দুইটি ফাংশনের অন্তরকের যোগফল ফাংশন দুইটির যোগফলের অন্তরকের সমান। নিচের স্ক্রিনে $x = 3$ বিন্দুতে $f(x) = 2x^3$ ও $g(x) = x^6$এর জন্য এটি দেখানো হলো-

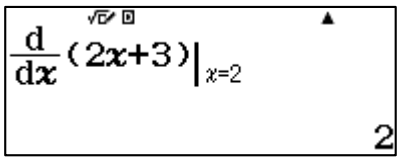


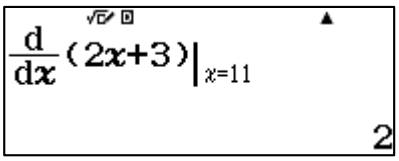


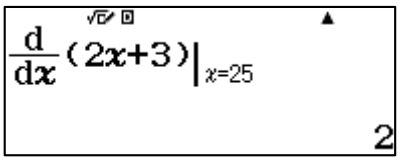


সুতরাং নির্বাচিত বিন্দুতে, ফাংশন দুইটির অন্তরকের যোগফল, ফাংশন দুইটির যোগফলের অন্তরকের সমান $54 + 1458 = 1512$

কোনো সরলরৈখিক ফাংশনের অন্তরকের মান খুব সহজেই এর ঢাল থেকে অনুমান করা যায়। সরলরৈখিক ফাংশনের সকল বিন্দুতে অন্তরকের মান সমান হয়, যা প্রকৃতপক্ষে একটি সরলরেখার বৈশিষ্ট্য। অন্তরক হচ্ছে সরল রেখাটির ঢাল। উক্ত সম্পর্কটি derivative নির্দেশনা ব্যবহার করে নিচে পর্যবেক্ষণ করা হলো।





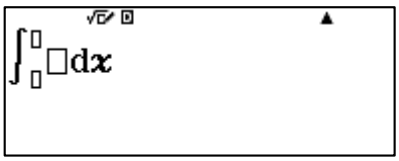


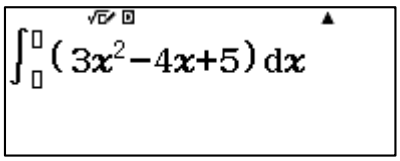
ClassWiz ক্যালকুলেটরে ফাংশন এবং অন্তরকের বিভিন্ন বৈশিষ্ট্য পরীক্ষা করা গেলেও সাধারণ অন্তরক অথবা অন্তরকের কোনো সূত্রের প্রতিপাদন সম্ভব নয়। কিন্তু সূত্রের বাস্তব প্রয়োগ এবং বাস্তব সমস্যা সমাধানে অন্তরক ব্যবহার করা যায়।

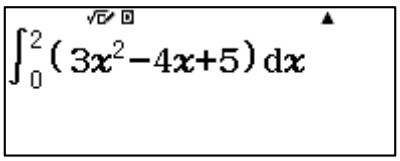
১২.৪ যোগজীকরণ

অন্তরীকরণের মতোই ClassWiz ক্যালকুলেটরের মাধ্যমে নির্দিষ্ট যোগজের মান বের করা যায়। সেজন্য [∫] কী ব্যবহার করতে হবে। বাস্তব জীবনে যোগজীকরণের অনেক ব্যবহার রয়েছে। যোগজীকরণের মাধ্যমে কোনো ফাংশনের লেখচিত্রের নির্দিষ্ট অঞ্চলের ক্ষেত্রফল বের করা যায়।

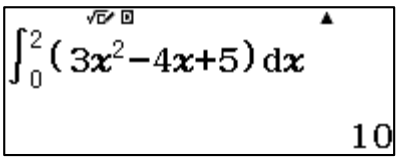
কোনো যোগজের মান সংখ্যাগতভাবে বের করার জন্য প্রথমে [∫] কী চাপতে হবে এরপর পর্যাক্রমে ফাংশন ও ◀, ▶ কী ব্যবহার করে সীমার মান প্রবেশ করাতে হবে। নিচে $f(x) = 3x^2 - 4x + 5$ এর লেখচিত্র এর নিচের ও x অক্ষের উপরের এবং $x = 0$ ও $x = 2$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল অর্থাৎ $\int_0^2 3x^2 - 4x + 5\, dx$ এর মান বের করার তিনটি ধাপ দেখানো হলো-







উপরের সীমার মান প্রবেশ করানোর পর [=] বাটন চাপলে স্ক্রিনে ফলাফল প্রদর্শিত হবে।

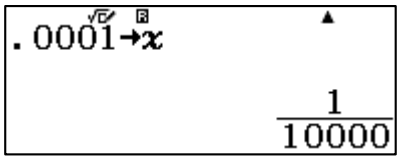


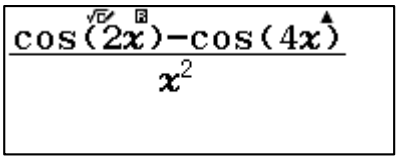
এটি ক্ষেত্রফলের সংখাগত আসন্ন মান (আর তাই কিছু ফাংশনের যোগজীকরণ করতে ক্যালকুলেটর বেশ সময় নেয়) লক্ষণীয়যে সাধারণ বীজগাণিতিক ফাংশনের নির্দিষ্ট যোগজের মান বের করার জন্য calculator টিকে Angle unit, degree *mode* এ রাখতে হয় অন্যদিকে ত্রিকোণমিতিক ফাংশনের নির্দিষ্ট যোগজের মান বের করার জন্য ক্যালকুলেটরের Angle unit, radian *mode* এ রাখতে হবে।

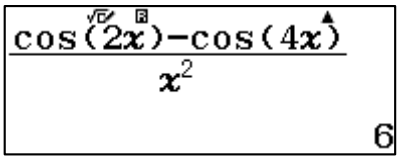
উদাহরণমালা

১. $\lim_{x \to 0} \frac{cos2x-cos4x}{x^2}$

সমাধান- Calulate *mode* এ প্রথমে Angle unit radian এ নিতে হবে। যেহেতু $x \to 0$ তাই x এর মান হিসেবে খুব ছোট একটি মান যেমন $.0001$ [STO] চেপে x মেমোরিতে সংরক্ষণ করে রাশিটি নিচের দ্বিতীয় স্ক্রিনের মতো ক্যালকুলেটরে প্রবেশ করাতে হবে। এরপর [=] চাপলে তৃতীয় স্ক্রিনের মতো ফলাফল প্রদর্শিত হবে।



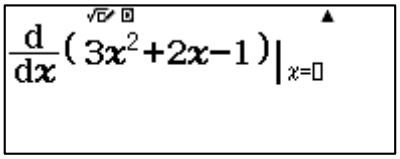


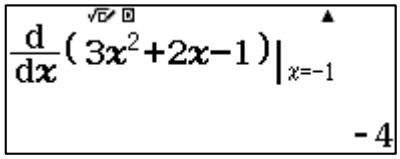


(Key log- [SHIFT] [MENU] [2] [2] [•] [0] [0] [0] [1] [STO] [x] [AC] [▭] [cos] [2] [x] [)] [−] [cos] [4] [x] [)] [▶] [x] [x²] [=])

২. $y = 3x^2 + 2x - 1$ বক্ররেখার $(-1,0)$ বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল নির্ণয় করতে হবে।

সমাধান- প্রথমে [SHIFT] [∫▭] ($\frac{d}{dx}$▪) চেপে ক্যালকুলেটরে অন্তরক অপারেটরটি প্রবেশ করাতে হবে। এরপর নিচের প্রথম স্ক্রিনের মতো করে ফাংশনটি ক্যালকুলেটর প্রবেশ করিয়ে [▶] বাটনের সাহায্যে $x = -1$ এর মান প্রবেশ করাতে হবে। এরপর [=] বাটন চাপলে দ্বিতীয় স্ক্রিনের মতো ঢাল বা $\frac{dy}{dx}$ এর মান পাওয়া যাবে।

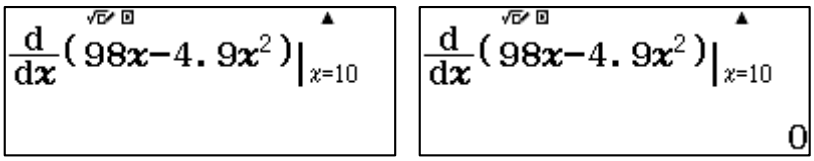




(Key log- [SHIFT] [∫▭] [3] [x] [x²] [+] [2] [x] [−] [1] [▶] [−] [1] [=])

৩. একটি পাথরখন্ড 98 মিটার/সেকেন্ড বেগে খাড়া উপরের দিকে নিক্ষেপ করা হলো। t সময়ে এর গতি সমীকরণ $s = 98t - 4.9t^2$ রূপে প্রকাশিত হলে $10s$ পর এর বেগ কত হবে, তা বের করতে হবে।

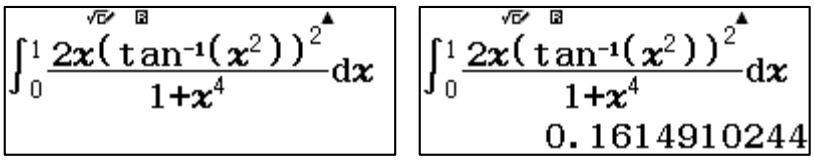
সমাধান- সমস্যাটিতে পাথরটির সরণের মান দেওয়া হয়েছে। একে সময়ের সাপেক্ষে অন্তরীরকণ করলে বেগ পাওয়া যাবে। [SHIFT] [∫] ($\frac{d}{dx}$) চেপে প্রথমে ক্যালকুলেটরে অন্তরক অপারেটর প্রবেশ করিয়ে [▶]বাটন চেপে $x = 10$ প্রবেশ করাতে হবে। এরপর [=]চাপলে $10s$ পরের বেগ পাওয়া যাবে।



(Key log- [SHIFT] [∫] [9] [8] [x] [−] [4] [•] [9] [x] [x²] [▶] [1] [0] [=])

8. $\int_0^1 \frac{2x(\tan^{-1} x^2)^2}{1+x^4}\, dx.$

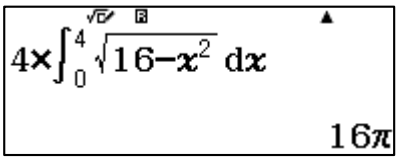
সমাধান- প্রথমে Calulate *mode* এ গিয়ে Angle unit, radian *mode* এ নিতে হবে। এরপর [∫]চেপে যোগজীকরণ অপারেটর ক্যালকুলেটরে প্রবেশ করাতে হবে। অতঃপর ফাংশনটি প্রবেশ করিয়ে [▶]ব্যবহার করে যোগজীকরণের উচ্চসীমা ও নিম্নসীমা প্রবেশ করাতে হবে। এখন [=] বাটন চাপলে ফলাফল পাওয়া যাবে।



(Key log- [SHIFT] [MENU] [2] [2] [∫] [▭] [2] [x] [(] [SHIFT] [tan] [x] [x²] [)] [)] [x²] [▼] [1] [+] [x] [x■] [4] [▶] [▶] [▶] [0] [▶] [1] [=])

৫. $x^2 + y^2 = 16$ বৃত্ত দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে হবে।

সমাধান- বৃত্তটির ব্যাসার্ধ $\sqrt{16} = 4$। সুতরাং 0 থেকে 4 সীমার মধ্যে $y = \sqrt{16 - x^2}$ এর যোগজীকরণ ফলকে 4 দ্বারা গুণ করলে বৃত্তটি দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল পাওয়া যাবে। এই জন্য নিচের চিত্রের মতো ক্যালকুলেটরের মাধ্যমে মান বের করতে হবে। লক্ষণীয়যে, ক্যালকুলেটরের Angle unit, Radian *mode* এ থাকতে হবে।



অনুশীলনী-১২

১. (ক) $f(x) = \frac{x-3}{5x-4}$ ফাংশনটি $0 \leq x \leq 1$ব্যবধিতে বিচ্ছিন্ন। মানের তালিকা ব্যবহার করে বিচ্ছিন্নতার বিন্দু খুঁজে বের করতে হবে।

(খ) এটি কী উলম্ব বিচ্ছিন্নতা না সংশোধনযোগ্য বিচ্ছিন্নতা?

২. (ক) $-10 \leq x \leq 10$ এর মধ্যে ব্যবধান 1 নিয়ে একটি মানের তালিকা প্রস্তুত করতে হবে।

(খ) মানের তালিকাটি কীভাবে ফাংশনটির পরিবর্তনের হার বর্ণনা করে?

(গ) মানের তালিকা ব্যবহার করে $x = 7$ বিন্দুতে ফাংশনটির অন্তরকের মান বের করতে হবে।

৩. ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে সাংখ্যিক অন্তরকের মান বের করতে হবে।

(ক) $x = 3$ বিন্দুতে $f(x) = x^2 + 2$

(খ) $x = -1$ বিন্দুতে $f(x) = 4x^2 - 2x^2 + 1$

(গ) $x = 5$ বিন্দুতে $f(x) = \frac{x+1}{2x-3}$

(ঘ) $x = 1$ বিন্দুতে $f(x) = \frac{1}{x^2-4}$

(ঙ) $x = 4$ বিন্দুতে $f(x) \ln x$

৪. (ক) $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x}$ এর মান বের করার জন্য মানের তালিকা ব্যবহার করতে হবে।

(খ) $\boxed{\text{CALC}}$ ব্যবহার করে $\lim_{x \to \infty} \frac{5-4x}{2x+3}$ এর মান বের করতে হবে।

৫. (ক) $x = -0.5, 0, 0.5$ এর জন্য $f(x) = x^3 + 3$

(খ) $x = -0.5, 0, 0.5$ এর জন্য $f(x) = x^2 - 5$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় করতে হবে।

৬. নিচের নির্দিষ্ট যোগজগুলোর বের করতে হবে-

(ক) $\int_0^1 x^2 dx$

(খ) $\int_2^5 (3x - 1) dx$

(গ) $\int_1^5 (-x^2 + 4x + 1) dx$

(ঘ) $\int_{-1}^4 (x^3 - 5x^2 + 2x + 8) dx$

(ঙ) $\int_{-1}^2 (x^3 - 5x^2 + 2x + 8) dx$

(চ) $\int_2^4 (x^3 - 5x^2 + 2x + 8) dx$

৭. (ক) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8$ এবং x অক্ষ যেখানে $x = -1$ থেকে $x = 4$ এর মাঝের ক্ষেত্রফল বের করতে হবে।

(খ) $x = -1$ থেকে $x = 4$ ব্যবধিতে ব্যবধান 0.2 নিয়ে একটি মানের তালিকা তৈরি করতে হবে।

(গ) মানের তালিকা ব্যবহার করে ফাংশনটির মান -1 থেকে 4 এর মধ্যে কীভাবে পরিবর্তন হয় তা ব্যাখ্যা করতে হবে।

(ঘ) $x = -1$ থেকে $x = 4$ ব্যবধিতে ফাংশনটির লেখচিত্র আঁকতে হবে।

ত্রয়োদশ অধ্যায়

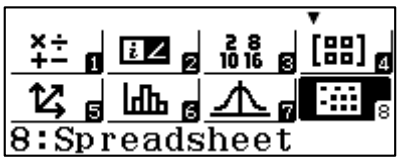
স্প্রেডশীট
(Spreadsheet)

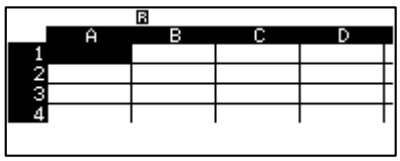
ক্যালকুলেটরে স্প্রেডশীটের ধারণা তুলনামূলকভাবে নতুন। বাংলাদেশে এ পর্যন্ত CASIO এর যে সকল ক্যালকুলেটর এসেছে সেগুলোর কোনোটিতে Spreadsheet দিয়ে কাজ না করা গেলেও ClassWiz এ Spreadsheet ব্যবহার করার সুবিধা রয়েছে। Spreadsheet ব্যবহার করে বেশ কিছু সমস্যার সমাধান করা যায়। Spreadsheet এ Microsoft Office, excel এর কিছু কাজ করা যায়। পরীক্ষার খাতার নম্বরপত্র তৈরি থেকে শুরু করে তথ্য সংক্রান্ত বেশ কিছু কাজে Spreadsheet এর ব্যাপক ব্যবহার রয়েছে। এই অধ্যায়ে ClassWiz ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে নিম্নোক্ত বিষয়গুলো সম্পর্কে আলোচনা করা হবে-

- Spreadsheet কীভাবে কাজ করে এবং বিভিন্ন গাণিতিক সমস্যা সমাধানে কিভাবে এটি ব্যবহার করা যায়
- Spreadsheet এর সাধারণ ক্যালকুলেশন যেমন-
  - যোগফল নির্ণয়
  - সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মান নির্ণয়
  - গড় নির্ণয়
- Spreadsheet এ Formula এর ব্যবহার
- Spreadsheet এ Fill নির্দেশনা এর ব্যবহার
- Spreadsheet ব্যবহার করে বিদ্যালয়ে ছাত্র-ছাত্রীদের পরীক্ষার ফলাফল তৈরি

এরপর কিছু গাণিতিক উদাহরণে Spreadsheet এর ব্যবহার নিয়ে আলোচনা করা হবে।

ClassWiz Spreadsheet এর 225 টি আয়তাকার ঘর বা সেল রয়েছে যেগুলো 5 টি কলাম (A থেকে E) ও 45 টি সারি (1- 45) দ্বারা নির্দেশিত। [MENU] [8] চেপে Spreadsheet *mode* এ গেলে একটি খালি Spreadsheet দেখা যাবে, যা নিচের প্রথম স্ক্রিনে দেখানো হলো। Spreadsheet *mode* এ প্রবেশ করলে পূর্বে Spreadsheet এ প্রবেশকৃত সব তথ্য মুছে যাবে।

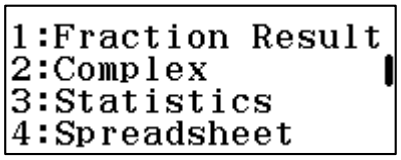


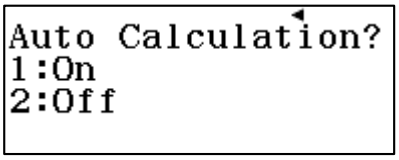


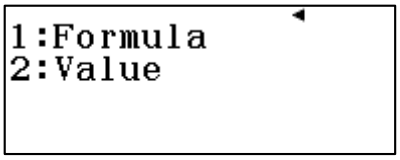
Spreadsheet এর প্রতিটি ঘরের একটি নির্দিষ্ট নাম রয়েছে, যার শুরু একটি বর্ণ দিয়ে ও শেষ সংখ্যা দিয়ে। এই বর্ণ কলামের অবস্থান ও সংখ্যাটি সারির অবস্থান নির্দেশ করে। উপরের খালি Spreadsheet টিতে $A1$ ঘর নির্বাচিত হয়ে আছে। কার্সর কী ▼ ▲ ▶ ◀ ব্যবহার করে যে কোনো ঘর বা সেল নির্বাচন করা যায়। শুরুতে সবগুলো ঘরই খালি থাকে। কিন্তু কার্সর ব্যবহার করে যে কোনো ঘরেই মান প্রবেশ করানো যায়। সংখ্যা প্রবেশ করানোর পর [=] বাটন চাপতে হয়।

কোনো ঘরের মান পরিবর্তনের জন্য কার্সর কী ব্যবহার করে ওই ঘরে যেয়ে নতুন সংখ্যা প্রবেশ করালে তা পূর্বের মান প্রতিস্থাপিত করবে। কোনো সেল বা ঘরের মান মুছে ফেলতে হলে [DEL] ব্যবহার করতে হবে।

Spreadsheet এর জন্য SET UP –এ দুটি নির্দেশনা রয়েছে, যা SET UP menu (SHIFT MENU) এর দ্বিতীয় পেজ থেকে 4 চেপে নির্বাচন করতে হয়। আপাতত 1 1 চেপে Autocalc on এবং 2 1 চেপে show cell থেকে Formula নির্বাচন করা হলো।

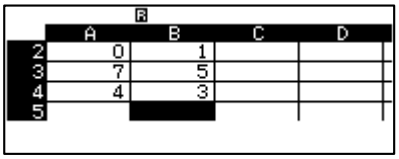






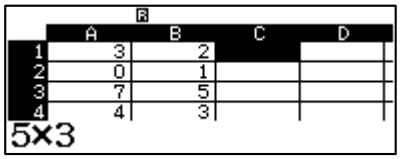
১৩.১ সাধারণ ক্যালকুলেশন

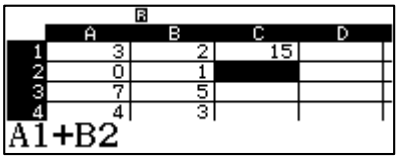
স্প্রেডশীট (Spread sheet) ব্যবহার করে সাধারণ গণনা খুব সহজেই করা যায়। কিভাবে এটি করা যায় তা বোঝার জন্য নতুন একটি Spreadsheet এ নিচের মতো করে মানগুলো প্রবেশ করানো হলো। লক্ষণীয় যে একটি সংখ্যা প্রবেশ করানোর পর = চাপলে কার্সর নিচের সারির পরের ঘরে চলে যায় আর তাই কলাম অনুযায়ী সংখ্যা প্রবেশ করানো বেশি সুবিধাজনক।

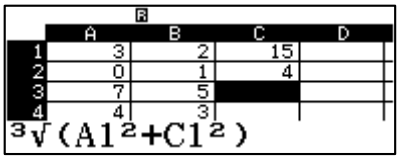


কোনো ঘরের মান হিসেবে সরাসরি একটি Operation করা যায়। উদাহরণস্বরূপ $C1$ ঘরে 5×3 প্রবেশ করিয়ে = চাপলে $C1$ এর মান হিসেবে 15 নির্দিষ্ট হবে। ভুল সংশোধনের জন্য DEL ব্যবহার করতে হবে।

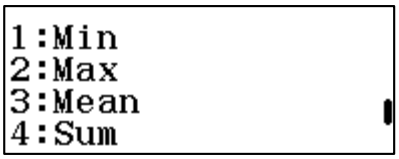
অন্যান্য ঘরের মান থেকে নতুন একটি ঘরে মান গণনা করা যায়। উদাহরণস্বরূপ $C2$ ঘরে $A1 + B2$ লিখে = চাপলেই নিচের মতো মান প্রদর্শিত হবে। ALPHA (–) এবং ALPHA ,,, ব্যবহার করে A ও B পাওয়া যায়। $A1$ এর মান 3 ও $B2$ এর মান 1 এর যোগফল 4 হবে $C2$ ঘরের মান। আরও কিছু জটিল গণনা সহজেই করা যায় যা নিচের তিন নম্বর স্ক্রিনে দেখানো হলো।





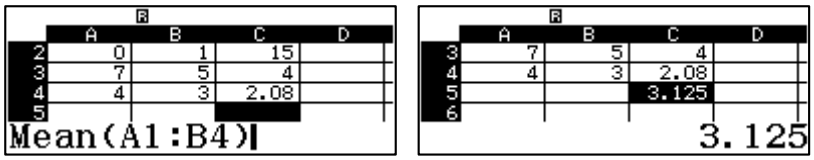


পরবর্তী ধাপের জন্য কার্সরটিকে $D1$ ঘরে নিয়ে যেতে হবে। ClassWiz এ নিচের মতো করে একগুচ্ছ ঘরের জন্য কিছু কার্যকর গণনা/হিসাব করা যায়। নিচের মেনুটি OPTN menu এর চতুর্থ স্ক্রিনে পাওয়া যাবে। OPTN চাপার পর তিনবার ▼ কী চাপলে এটি পাওয়া যাবে। আবার OPTN চাপার পর ▲ কী দুইবার চাপলেও একই স্ক্রিন পাওয়া যাবে।

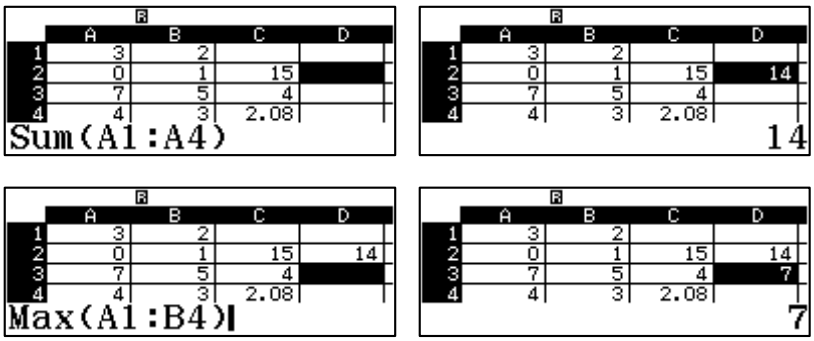


নির্দেশনাগুলোর নাম থেকেই তাদের কাজ পরিষ্কারভাবে বোঝা যাচ্ছে। যে একগুচ্ছ ঘর নিয়ে কাজ করতে হবে তা নিদিষ্ট করার জন্য প্রথম ও শেষ ঘরের নাম ALPHA ∫ চেপে ':' ব্যবহার করে টাইপ করতে হবে। উদাহরণস্বরূপ

mean (A1: B4) নির্দেশনা $A1$ থেকে শুরু করে $B4$ পর্যন্ত আটটি ঘরের মানের গড় বের করবে। এই নির্দেশনা $C4$ ঘরে ব্যবহার করার জন্য কার্সরটি $C4$ ঘরে নিয়ে [3] চেপে Mean নির্দিষ্ট করে (A1: B4) নির্দেশনা ব্যবহার করে [=] চাপলেই নিচের মতো ফলাফল পাওয়া যাবে।

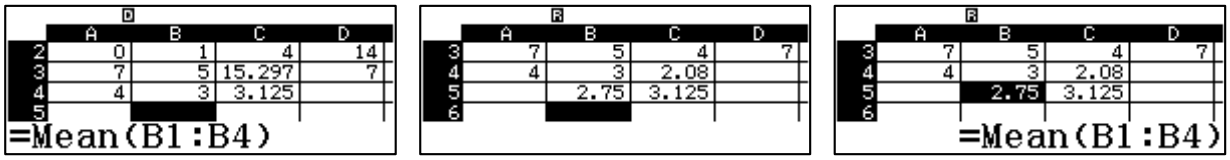


A কলামের যোগফল বের করার জন্য $D2$ ঘরে $sum(A1{:}A4)$ নির্দেশনা ব্যবহার করতে হবে। $D3$ ঘরে সর্বোচ্চ মান বের করার জন্য ঐ ঘরে Max (A1 : B4) নির্দেশনা ব্যবহার করতে হবে।



১৩.২ Formula এর ব্যবহার

Spreadsheet এর কার্যকারিতা Formula এর ব্যবহারের উপরেই মূলত নির্ভরশীল। গণিতে Formula হলো নির্দিষ্ট উপায়ে চলকগুলো সম্পর্কিত করা। এক্ষেত্রে Spreadsheet এ প্রতিটি ঘরের উপাদানগুলো চলক হিসেবে বিবেচিত হয়। Spreadsheet এর কোনো ঘরে Formula এর সূচনা করার জন্য [ALPHA] [CALC] ব্যবহার করে সমান চিহ্ন দিয়ে শুরু করতে হয়। (এক্ষেত্রে [=] কী ব্যবহার করা যাবে না) এটি কিভাবে কাজ করে তা বোঝার জন্য B কলামের গড় বের করার Formula B5 ঘরে টাইপ করতে হবে। এজন্য সমান চিহ্ন দিয়ে শুরু করতে হবে যা নিচের প্রথম স্ক্রিনে দেখানো হয়েছে।

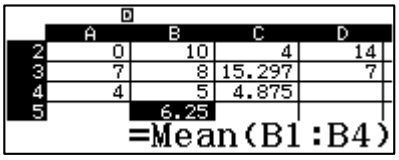


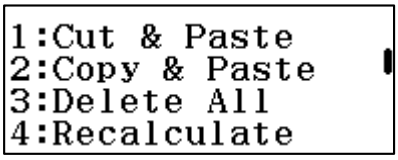
Formula শেষ করার জন্য [=] বাটন চাপলে ঘরটির পূর্বের মান 2.75 দ্বারা প্রতিস্থাপিত হবে। 2.75 হলো B কলামের মানের গড়। কার্সরটি অন্য ঘরে নিয়ে গেলে $B5$ ঘরে 2.75 প্রদর্শিত হবে কিন্তু পুনরায় ঐ ঘরে নিয়ে গেলে উপরের সর্বশেষ স্ক্রিনের মতো নিচের দিকে Formula টি প্রদর্শিত হবে।

$B5$ ঘরে একটি Formula রয়েছে যার একটি মানও রয়েছে। মানটি সবসময় Spreadsheet এর ঐ ঘরে প্রদর্শিত হবে। যেহেতু SET UP menu ব্যবহার করে Show cell থেকে Formula নির্বাচন করা হয়েছিল তাই কার্সরটি ঐ ঘরে নিয়ে গেলে Formula টি প্রদর্শিত হবে। যদি Show cell থেকে value নির্বাচন করা হয় তাহলে Formula টি ঐ ঘরে থাকলেও প্রদর্শিত না হয়ে বরং মান প্রদর্শিত হবে।

Formula ব্যবহার করার সুবিধা হলো যদি কোনো ঘরের মান পরিবর্তন করা হয় তাহলে নতুন করে Formula হিসাব করার প্রয়োজন পরেনা বরং স্বয়ংক্রিয়ভাবে নতুন গড় $B5$ ঘরে প্রদর্শিত হবে। এটি পর্যবেক্ষণ করার জন্য $B2, B3$ ও $B4$

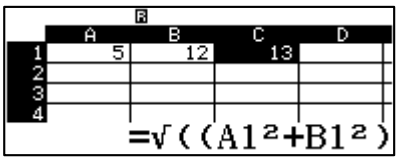
ঘরের মান পরিবর্তন করে নিচের স্ক্রিনে দেখানো হলো। $B2, B3$ ও $B4$ ঘরের পরিবর্তনের জন্য $B5$ ঘরে মানের পরিবর্তন হলেও $D1, D2$ ঘরে মানের কোনো পরিবর্তন হয় না। কেননা $D1$ ও $D2$ ঘরে $Formula$ ব্যবহার করা হয়নি।



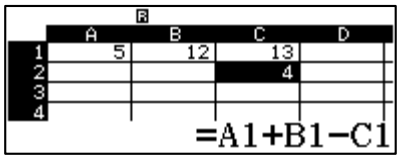


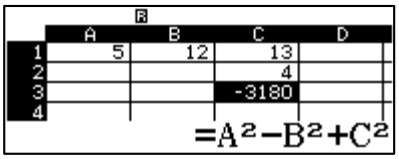
যদি স্বয়ংক্রিয়ভাবে গড়ের মান পরিবর্তন না হয় তাহলে SET UP menu তে গিয়ে Auto calculation on আছে কিনা তা দেখতে হবে। যদি off থাকে তাহলে OPTN menu এর দ্বিতীয় স্ক্রিন (যা উপরের দ্বিতীয় স্ক্রিনের মতো) থেকে 4 চেপে Recalculate করতে হবে।

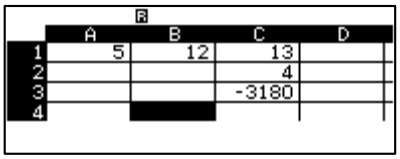
এখন পর্যন্ত Spreadsheet এ যে সকল Formula এর ব্যবহার দেখানো হয়েছে সেগুলো ছিল Built in Formula। Casio ClassWiz ক্যালকুলেটরে Built in Formula ছাড়াও অন্যান্য প্রয়োজনীয় Formula ব্যবহার করা যায়। নিচের স্প্রেডশীটে $A1$ ও $B1$ ঘরে একটি সমকোণী ত্রিভূজের দুইটি বাহু এর দৈর্ঘ্য দেয়া আছে। $C1$ ঘরে পীথাগোরাসের formula ব্যবহার করে তৃতীয় বাহু অর্থাৎ অতিভুজের দৈর্ঘ্য বের করা হয়েছে।



$A1$ ও $B1$ এর মান পরিবর্তন করা হলে সাথে সাথেই নতুন অতিভুজের মান $C1$ ঘরে বের হবে। একটি Spreadsheet এ অবশ্য বেশ কিছু Formula ব্যবহার করা যায়। নিচে এমন কিছু উদাহরণ দেয়া হলো-

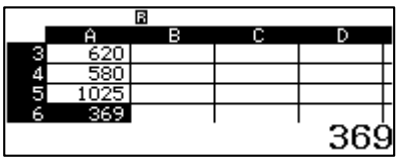






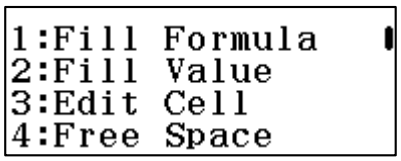
১৩.৩ Fill নির্দেশনা

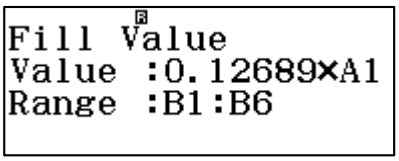
Spreadsheet এ Formula এর ব্যবহার যেমন Spreadsheet এর কার্যকারিতা ও বহুমুখিতা বৃদ্ধি করেছে তেমনি Spreadsheet এর সবচেয়ে বড় কার্যকারিতা হলো Spreadsheet এর মাধ্যমে একসাথে অনেকগুলো ঘর নিয়ে কাজ করার ক্ষমতো। এর মাধ্যমে নতুন ঘরে স্বয়ংক্রিয়ভাবে মান প্রবেশ করানো যায়। এজন্য fill নির্দেশনা ব্যবহার করতে হয়। ClassWiz এ দুই রকম fill নির্দেশনা রয়েছে। একটি সংখ্যাগত মান প্রবেশের জন্য এবং অন্যটি Formula প্রবেশের জন্য। উদাহরণ হিসেবে, নিচে একটি Spreadsheet তৈরিকরা হলো, যার মাধ্যমে মুদ্রার মান রূপান্তর করা যাবে। নতুন একটি Spreadsheet তৈরিকরার জন্য পূর্বের Spreadsheet এর সকল মান মুছে ফেলে প্রথম কলামের 6টি সারিতে টাকার পরিমাণ প্রবেশ করানো হলো-

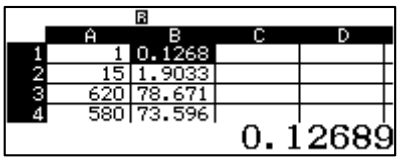


যদি 1 ডলার = 78.81 টাকা হয় তাহলে, বাংলাদেশী টাকাকে ডলারে রূপান্তরিত করার জন্য 78.81 দ্বারা ভাগ করতে হবে। অর্থাৎ টাকার পরিমাণকে 0.12689 দ্বারা গুণ করতে হবে। সুতরাং A কলামের প্রতিটি সংখ্যাকে 0.012689

দ্বারা গুণ করতে হবে এবং ফলাফলগুলো B কলামে সংরক্ষিত করতে হবে। নিচের মতো করে একটি একক নির্দেশনা Fill Value ব্যবহার করে এটি করা যায়। $B1$ ঘরে কার্সর থাকা অবস্থায় OPTN menu থেকে [2] চেপে Fill value নির্দেশনায় যেতে হয়। Fill Value নির্দেশনার দুইটি অংশ। প্রথমটি হলো Value যেখানে Formula লিখতে হবে ও দ্বিতীয়টি হলো Range অর্থাৎ একগুচ্ছ ঘরের জন্য ব্যবধি যার উপরে Formula -টি প্রয়োগ করতে হবে।

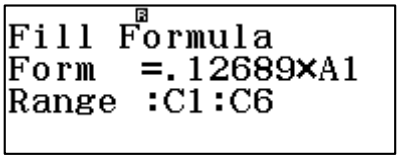


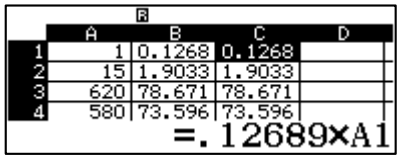




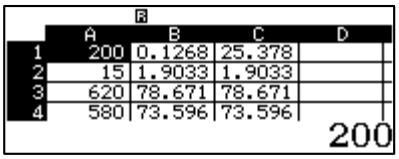
প্রথমে Formula টি টাইপ করে [=] বাটন চাপতে হবে। Value নির্দেশনার ফর্মূলাটিতে যে ঘরগুলোর (A1 থেকে A6) জন্য Formula প্রয়োগ করতে হবে তার প্রথম ঘরটি ($A1$) ব্যবহার করতে হয়। কার্সর ([◀] [▶]) এবং [DEL] কী ব্যবহার করে Range সম্পাদনা করতে হয়। এক্ষেত্রে Range হবে B1: B6। Range প্রবেশ করানোর পর দুইবার [=] চাপলে Formula টি A1 থেকে A6 প্রতিটি ঘরের মানগুলোর উপর প্রয়োগ হবে এবং B1 থেকে B6 ঘরগুলোতে ফলাফল প্রদর্শিত হবে।

[OPTN] [1] ব্যবহার করে আরেক ধরনের Fill নির্দেশনা (Fill Formula) ব্যবহার করে প্রতিটি ঘরে ফর্মূলা এবং মান উভয়ই প্রবেশ করানো যায়। এক্ষেত্রে C1 থেকে C6 ঘরে নিচের স্ক্রিনের মতো B কলামের মানগুলোর অনুরূপ মান সংরক্ষিত হবে। Fill Formula নির্দেশনার প্রথম অংশ অর্থাৎ Formula line এ পূর্বে থেকেই '=' চিহ্ন দেয়া আছে।





যদিও C কলামের মানগুলোর এবং B কলামের মানগুলো দৃশ্যত এক, কিন্তু কার্সর C কলামের যেকোনো ঘরে নিয়ে গেলে ক্যালকুলেটরের স্ক্রিনের নিচে Formula প্রদর্শিত হবে। ক্যালকুলেটরের কার্সরটিকে C কলামের ঘরগুলোতে আলাদা আলাদা ভাবে নিলে দেখা যাবে যে, প্রতিটি ঘরে আলাদা আলাদা Formula প্রদর্শিত হচ্ছে। এই Formula গুলো সংশ্লিষ্ট ঘরগুলোর জন্য গ্রহণযোগ্য। যেহেতু C কলামে Formula এবং B কলামে মান ব্যবহার করা হয়েছে, সুতরাং A কলামের কোনো মানের পরিবর্তনের জন্য B কলামের মানগুলো অপরিবর্তিত থাকবে। কিন্তু A কলামের যেকোনো ঘরের নতুন মানের জন্য C কলামে সংগতিপূর্ণ পরিবর্তন হবে, যার কারণ পূর্বে আলোচনা করা হয়েছে। নিচের স্ক্রিনে A কলামের মানগুলো পরিবর্তন করে দেখানো হলো।



লক্ষণীয় যে, C কলামের প্রতিটি ঘরে আলাদা আলাদা ভাবে Formula প্রবেশ করানো যায় কিন্তু Fill Formula নির্দেশনা ব্যবহার করা সুবিধাজনক।

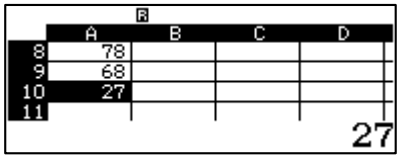
উদাহরণমালা

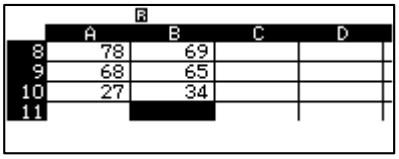
১. কোনো একটি স্কুলের নবম শ্রেণীর 10 জন ছাত্রের তিনটি বিষেয়ে প্রাপ্ত নম্বর দেয়া আছে, ছাত্রদের এই নম্বরগুলোর যোগফল, গড়, শতাংশ, সর্বোচ্চ নম্বর, সর্বনিম্ন নম্বর বের করতে হবে।

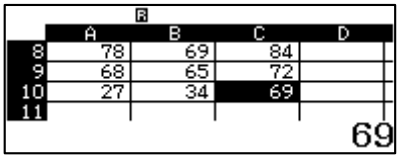
প্রাপ্ত নম্বরগুলো হলো

পদার্থ বিদ্যা	গণিত	রসায়ন
93	78	65
37	54	38
82	84	79
54	57	67
64	72	86
72	65	91
91	87	77
78	69	84
68	65	72
27	34	69

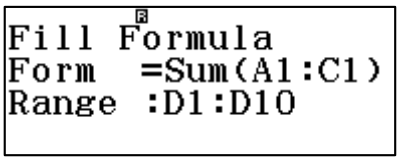
সমাধান- ছাত্রদের নম্বরপত্র তৈরির জন্য প্রথমে [MENU] [8] চেপে Spreadsheet *mode* এ যেতে হবে। Spreadsheet *mode* এ গেলে প্রথমে একটি খালি Spreadsheet এর পাতা আসবে। এই খালি Spreadsheet এর A, B ও C কলামে যথাক্রমে ছাত্রদের পদার্থবিদ্যা, গণিত ও রসায়ন এর নম্বরগুলো ক্রমানুযায়ী প্রবেশ করাতে হবে।

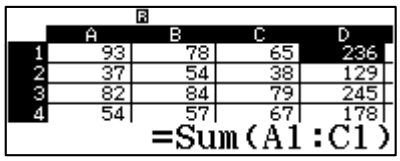






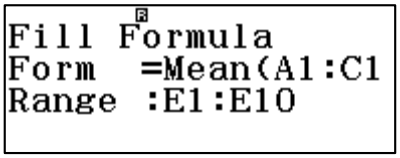
এরপর নম্বরগুলোর যোগফল D কলামে বের করার জন্য [OPTN] menu থেকে 1 চেপে Fill Formula নির্দিষ্ট করতে হবে। এরপর Form এ কার্সর নিয়ে পুনরায় [OPTN] menu তে গিয়ে [▼] চেপে দ্বিতীয় পেজ থেকে [4] চেপে sum নির্দিষ্ট করে A1 : C1 টাইপ করে [=] চাপতে হবে। এরপর Range এ গিয়ে D1 : D10 টাইপ করে [=] চাপলে সবগুলো বিষয়ের নম্বরের যোগফল D কলামে পাওয়া যাবে।

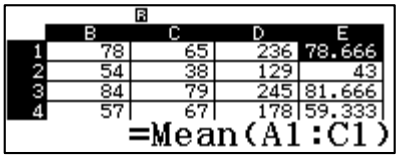




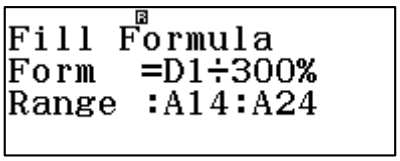
উল্লেখ্য যে Formula হিসেবে sum ব্যবহার না করে A1 + B1 + C1 ব্যবহার করলেও একই ফলাফল পাওয়া যেত।

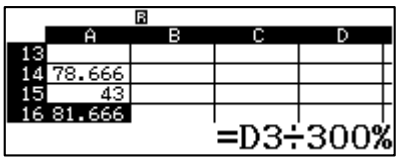
নম্বরের গড় বের করার জন্য [OPTN] menu থেকে Fill Formula নির্দিষ্ট করে Form এ গিয়ে পুনরায় [OPTN] চেপে [▼] বাটন চাপার পর [3] চেপে Mean নির্বাচন করতে হবে। অতঃপর A1: C1 টাইপ করে বন্ধনী ([)]) বন্ধ করতে হবে। এরপর [=] চেপে Range এ গিয়ে E1: E10 টাইপ করে [=] বাটন দুইবার চাপলে E কলামে নম্বরগুলোর গড় প্রদর্শিত হবে।





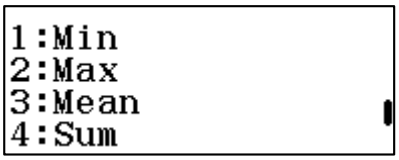
শতাংশ বের করতে হলে পুনরায় OPTN menu থেকে 1 চেপে Fill Formula নির্বাচন করতে হবে। এরপর Form এ গিয়ে D1÷ 300% (SHIFT Ans) ও Range এ গিয়ে A14 : A24 টাইপ করে দুইবার = বাটন চাপলে A কলামের 14 থেকে 24 নম্বর ঘরগুলোতে প্রতিটি ছাত্র কত শতাংশ নম্বর পেয়েছে তা প্রদর্শিত হবে।



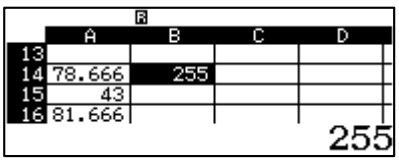


লক্ষণীয় যে যেহেতু আর নতুন কোনো কলাম নেই তাই Range হিসেবে A কলামের তিনটি ঘর বাদ রেখে 14 থেকে 24 নম্বর নেয়া হয়েছে যেন সহজেই এ মানগুলো আলাদা করা যায়। আরো লক্ষণীয়যে ছাত্রদের গড় নম্বর ও কত শতাংশ নম্বর পেয়েছে তার মান একই। কেননা প্রতিটি বিষয়ের নম্বর 100.

B14 ঘরে সর্বোচ্চ নম্বর বের করার জন্য কার্সর কী ব্যবহার করে B14 ঘরে যেয়ে OPTN চেপে ▼ কী চার বার চাপলে নিচের স্ক্রিনের মতো স্ক্রিন প্রদর্শিত হবে।

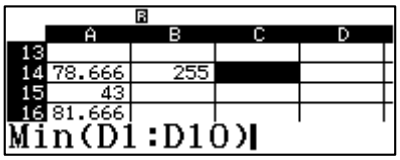


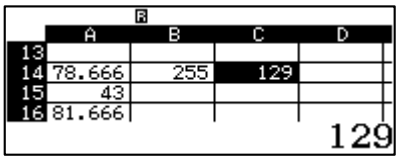
এরপর 2 চেপে Max নির্বাচন করে (D1: D10) টাইপ করে = চাপলে সর্বোচ্চ প্রাপ্ত নম্বর (255) $B14$ ঘরে প্রদর্শিত হবে।



ভাল করে লক্ষ্য করলে দেখা যাবে যে এই নম্বরটি 7 তম ছাত্র এর প্রাপ্ত নম্বর।

সর্বনিম্ন মান বের করার জন্য C14 ঘরে যেয়ে OPTN menu এর চতুর্থ পাতা থেকে 1 চেপে Min নির্দিষ্ট করে (D1 : D10) টাইপ করে = চাপলে সর্বনিম্ন প্রাপ্ত নম্বর 129, C14 ঘরে প্রদর্শিত হবে।

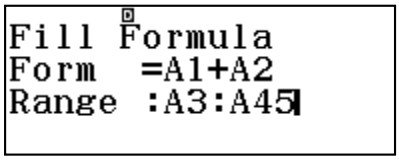


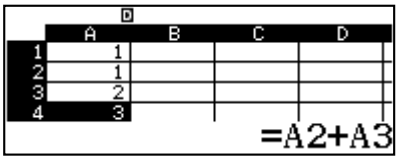


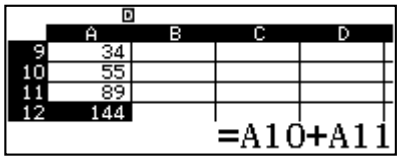
২. Fill Formula ব্যবহার করে Fibonacci সিরিজের প্রথম 45 টি মান বের করতে হবে।

সমাধান- আমরা জানি Fibonacci series হলো সংখ্যার এমন একটি series যার প্রতিটি সংখ্যা তার পূর্বের দুইটি সংখ্যার যোগফল। যার শুরু 1, 1 দিয়ে। Spreadsheet এর মাধ্যমে Fibonacci সিরিজ বের করার জন্য প্রথমে MENU 8 চেপে spread sheet *mode* এর প্রবেশ করে A1 ও A2 উভয় ঘরে 1 প্রবেশ করাতে হবে। এরপর OPTN

menu থেকে Fill Formula ব্যবহার করে Formula হিসেবে A1 + A2 এবং Range হিসেবে A3 : A45 প্রবেশ করিয়ে দুইবার [=] চাপলে নিচের চিত্রের মতো A কলামে Fibonacci series পাওয়া যাবে।

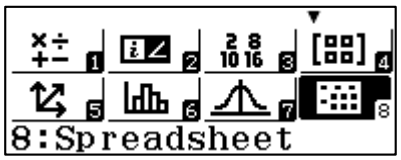


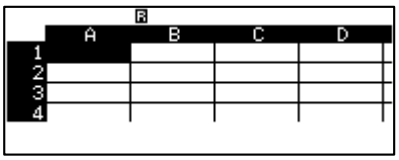


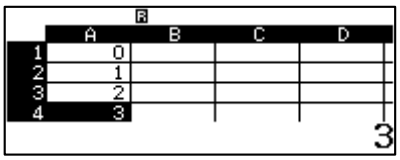


৩. 5% হার মুনাফায় 8000 টাকার 3 বছরের মুনাফা ও চক্রবৃদ্ধি মুনাফার পার্থক্য নির্ণয় করতে হবে।

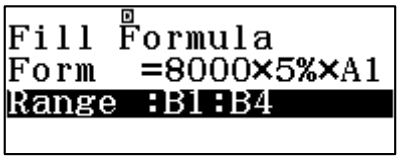
সমাধান- প্রথমে [MENU] [8] চেপে Spreadsheet *mode* নির্বাচন করতে হবে। এরপর খালি Spreadsheet এর A কলামের প্রথম চারটি ঘরে বছরের সংখ্যা $0, 1, 2, 3$ প্রবেশ করাতে হবে।

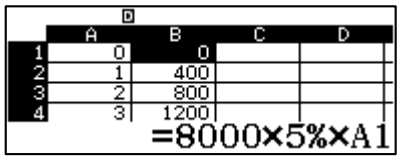




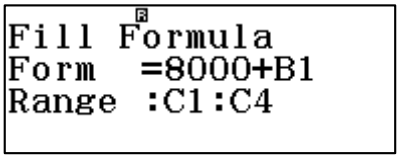


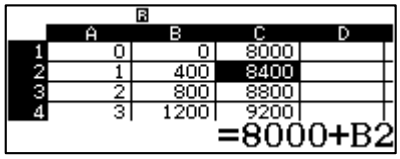
B1 ঘরে কার্সর নিয়ে [OPTN] menu থেকে [1] চেপে Fill Formula নির্বাচন করতে হবে। Form এ Formula হিসেবে $8000 \times \left(\frac{5}{100}\right) \times A1$ টাইপ করতে হবে। এরপর Range এ B1: B4 টাইপ করে দুইবার [=] চাপতে হবে। তাহলে নিচের মতো স্ক্রিন প্রদর্শিত হবে।



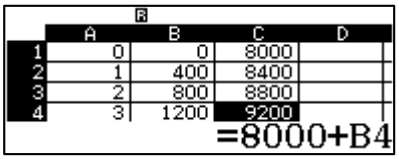


যেহেতু সরল মুনাফা তাই Fromula তে 8000 মূলধন হিসেবে নির্দিষ্ট। [OPTN] menu থেকে [1] চেপে Fill Formula নির্বাচন করে Form এ Formula হিসেবে $8000 + B1$ ও Range এ C1 : C4 টাইপ করে দুইবার [=] চাপলে প্রতি বছর শেষে মুনাফা আসলের পরিমাণ প্রদর্শিত হবে। B1 এ শূন্য বছর শেষে অর্থাৎ জমার সময় মুনাফা আসলের পরিমাণ 8000। দ্বিতীয় ঘরে লক্ষ্য করলে দেখা যাবে A কলামে বছরের সংখ্যা যখন 1 তখন C কলামে মুনাফা আসলের পরিমাণ 8400 এবং B কলামে মুনাফার পরিমাণ 400 প্রদর্শিত হয়েছে।

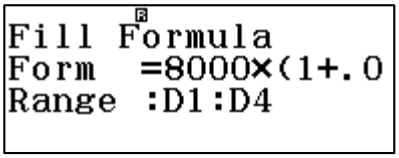


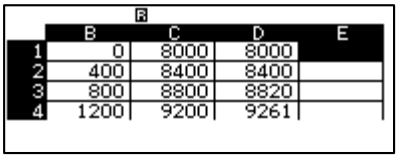


যা নির্দেশ করছে প্রথম বছর শেষে মুনাফার পরিমাণ 400 টাকা আর মুনাফা আসলের পরিমাণ $8000 + 400 = 8400$ টাকা। আবার তৃতীয় বছর শেষে মুনাফার পরিমাণ 1200 টাকা ও সূদাসলের পরিমাণ 9200 টাকা।

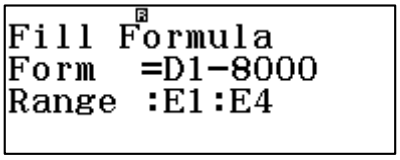


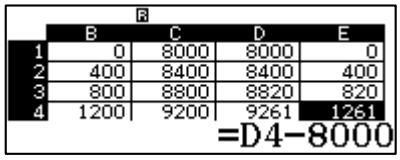
চক্রবৃদ্ধির মুনাফা ও মুনাফা আসলের পরিমাণ Spreadsheet এ চক্রবৃদ্ধির মুনাফার সূত্র $C = p(1 + r)^3$ ব্যবহার করে সহজেই বের করা যায়। এজন্য পুনরায় D1 ঘরে যেয়ে Option থেকে Fill Formula নির্বাচন করে Formula হিসেবে $8000(1 + .05)^{A1}$ টাইপ করতে হবে। এরপর Range হিসেবে D1 : D4 টাইপ করে দুই বার [=] চাপতে হবে। তাহলে D কলামে চক্রবৃদ্ধির সূদাসল পাওয়া যাবে।



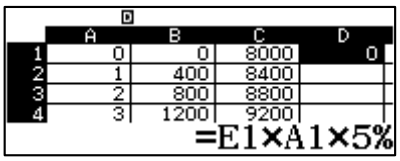


C কলামে সরল সুদাসল এবং D কলামে চক্রবৃদ্ধির সুদাসল প্রদর্শিত হয়েছে। C4 ঘরের মান ও D4 ঘরের মানের পার্থক্যই হলো মুনাফার পার্থক্য যা $9261 - 9200 = 61$টাকা। আবার E1 ঘরে যেয়ে Fill Formula তে Formula হিসেবে $D1 - 8000$ ও E1: E4 টাইপ করে [=] বাটন দুইবার চাপলে E কলামে প্রতিবছর শেষে চক্রবৃদ্ধির মুনাফা প্রদর্শিত হবে।

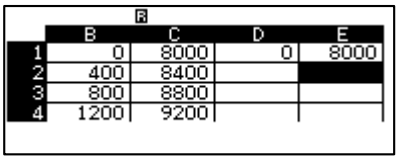




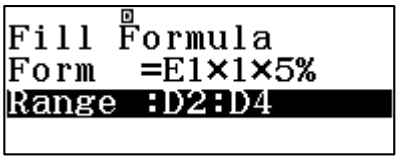
আবার বিকল্প পদ্ধতিতে চক্রবৃদ্ধির মুনাফা ও মুনাফা-আসলের পরিমাণ বের করতে হলে D1 ঘরে যেয়ে [OPTN] menu থেকে Fill formula নির্বাচন করে Formula হিসেবে $E1 \times A1 \times (5\%)[nPr]$ টাইপ করতে হবে ও Range হিসেবে D1 : D1 টাইপ করে [=] বাটন দুইবার চাপলে নিচের মতো স্ক্রিন পাওয়া যাবে।

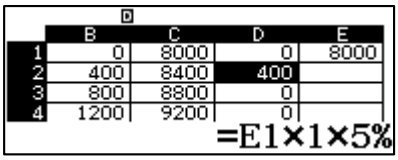


E1 ঘরে মূলধন 8000 প্রবেশ করিয়ে [=] বাটন চাপলে নিচের মতো স্ক্রিন পাওয়া যাবে।

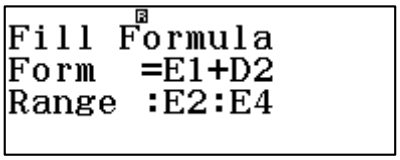


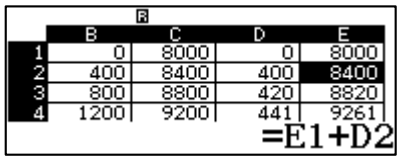
এরপর D2 ঘরে Fill Formula নির্বাচন করে Formula হিসেবে $E1 \times 1 \times (\frac{5}{100})$ ও Range হিসেবে D2 : D4 টাইপ করে [=] চাপলে নিচের মতো স্ক্রিন পাওয়া যাবে।





এরপর E2 ঘরে Formula হিসেবে $E1 + D2$ প্রবেশ করিয়ে Range হিসেবে E2 : E4 টাইপ করে [=] বাটন দুইবার চাপলে নিচের মতো মুনাফা ও সুদাসলের তালিকা পাওয়া যাবে।





Spreadsheet ভালভাবে পর্যবেক্ষণ করলে দেখা যাবে যে প্রথম বছর $[A = 1]$ সরল মুনাফা ও চক্র বৃদ্ধির মুনাফা সমান, দ্বিতীয় বছর $[A = 2]$ শেষে সরল মুনাফা 800 টাকা কিন্তু চক্রবৃদ্ধির মুনাফা $400 + 420$ টাকা এবং তৃতীয় বছর শেষে সরল মুনাফা 1200 টাকা যেখানে চক্রবৃদ্ধির মুনাফা $400 + 420 + 441 = 1261$ টাকা।

সুতরাং সরল মুনাফা ও চক্র বৃদ্ধির মুনাফার পার্থক্য $1261 - 1200 = 61$ টাকা।

আবার সুদাসলের পার্থক্য থেকে মুনাফার পার্থক্য $9261 - 9200 = 61$ টাকা।

অনুশীলনী-১৩

১. নিচের মানগুলো একটি নতুন Spreadsheet এ প্রবেশ করাও-

	A	B	C	D
1	4	6	11	
2	2	8	2	
3	9	13	5	
4				

(ক) $D1$ ঘরে $A1$ ও $B2$ যোগ করার জন্য একটি নির্দেশনা (Formula নয়) প্রবেশ করাও।

(খ) $D2$ ঘরে $A2 + B2 + C2$ নির্ণয় করার জন্য একটি Formula প্রবেশ করাও। এরপরে $A2$ ঘরে 7 প্রবেশ করিয়ে পরীক্ষা কর।

(গ) A ও B কলামের ছয়টি ঘরের গড় বের করার জন্য $D3$ ঘরে একটি Formula লিখ। $B2$ ঘরে 3 প্রবেশ করিয়ে পরীক্ষা কর।

(ঘ) A, B ও C কলামের প্রত্যেকটির সর্বোচ্চ মান বের করার জন্য $D4$ ঘরে একটি Formula লিখ। এরপর $B1$ ঘরে 37 প্রবেশ পরীক্ষা কর।

২. একটি নতুন Spreadsheet এ Fill value নির্দেশনা ব্যবহার করে B কলামের প্রথম 15টি ঘরে 3 থেকে শুরু করে প্রতিবার 10 বৃদ্ধির জন্য বাকি ঘরগুলো পূর্ণ কর। এরপর $B1$ এর মান পরিবর্তন করে দেখ যে এটি কলামের বাকি অংশে কোনো পরিবর্তন করে না।

৩. (ক) একটি নতুন Spreadsheet এ $A1$ ঘরে 5 এবং $D1$ ঘরে 7 প্রবেশ করাও।

(খ) Fill Formula ব্যবহার করে 7 করে বৃদ্ধির জন্য $A30$ পর্যন্ত ঘর পূরণ কর।

(গ) $D1$ কে পরিবর্তন করে 5 করে বৃদ্ধি জন্য 150 পর্যন্ত গণনা কর।

৪. Spreadsheet ব্যবহার করে $f(x) = x^2 + x$ ফাংশনটির একটি মানের তালিকা তৈরি কর। শুরুর জন্য A কলামে এর বিভিন্ন মান নাও এবং এরপর Fill Formula ব্যবহার করে B কলামে বিভিন্ন মানের জন্য ফাংশনের মান বের কর।

৫. নিচের Spreadsheet এবং Fill Formula ভালোভাবে লক্ষ্য করো-

	A	B	C	D
1	4	6	11	
2	2	8	2	
3	9	13	5	
4				

```
Fill Formula
Form  =Sum(A1:A3)
Range :A4:C4
```

(a) উপরের Fill Formula প্রবেশ করালে কী হবে তা ব্যাখ্যা কর।

(b) Fill Formula কে পরিবর্তন করে Mean (A1 : A3) লিখলে কী হবে? SETUP এ গিয়ে Show cell থেকে Formula তে পরিবর্তন করে পরীক্ষা কর।

চতুর্দশ অধ্যায়

পরিসংখ্যান ও সম্ভাবনা

(Statistics and Probability)

বাস্তব জীবনের প্রায় সকল ক্ষেত্রে পরিসংখ্যান ও সম্ভাবনার ব্যাপক ব্যবহার পরিলক্ষিত হয়। পরিসংখ্যান হচ্ছে সেই বিজ্ঞান, যেখানে তথ্য ও উপাত্ত সংগ্রহ, সাজানো এবং বিশ্লেষণের মাধ্যমে ভবিষ্যতের সম্পর্কে ধারণা পাওয়া যায়।

অন্যদিকে, কোনো ঘটনা ঘটার ক্ষেত্রে অনিশ্চয়তা থাকলেই কেবল সম্ভাবনার কথা বলা হয়।

এই অধ্যায়ে ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে, যে সব বিষয়ে আলোকপাত করা হবে-

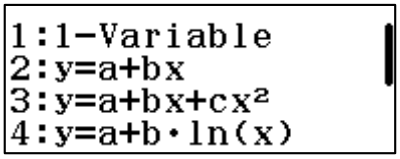
- বিভিন্ন চলকের সনাক্তকরণ
- বিভিন্ন রকম সম্ভাবনা নির্ণয়
- সমাবেশ ব্যবহার করে সম্ভাবনা নির্ণয়
- পরিমিতো বিন্যাস

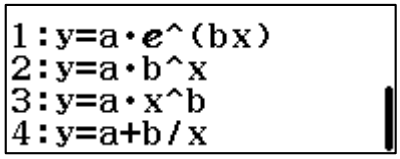
এই অধ্যায়ে Statistics *Mode* ফাংশন ব্যবহার করে পরিসংখ্যান সম্পর্কিত সমস্যার সমাধান সম্পর্কে আলোচনা করা হবে। সেজন্য [MENU] [6] বাটন চেপে Statistics *Mode* এ প্রবেশ করতে হবে।

১৪.১ বিভিন্ন চলকের সনাক্তকরণ

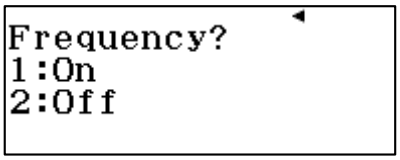
১৪.১.১ এক-চলকের আলোচনা

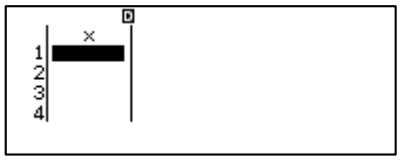
প্রথমে এক চলকের আলোচনা ও সমস্যাবলী দেখানো হবে এবং পরবর্তীতে দুই-চলকের কিছু সমস্যা দেখানো হবে। [MENU] [6] বাটন চাপার পর নিম্নোক্ত চিত্র দেখা যাবে।





এরপর এক-চলকের জন্য [1] (1 – VAR) বাটন চাপতে হবে। কিছু সমস্যায় গণসংখ্যা (Frequency) থাকে আবার কিছু সমস্যায় থাকে না। তাই ClassWiz এর গণসংখ্যা (Frequency *Mode*) ঠিক করে নিতে হবে। এজন্য [SHIFT] [MENU] এবং ▼ বাটন চেপে Statistics- যেতে হবে এবং নিম্নোক্ত চিত্র দেখা যাবে।





গণসংখ্যা ছাড়া কাজ করার জন্যে [2] বাটন চাপতে হবে। তখন স্ক্রিনে উপাত্ত প্রবেশ করানোর জন্য একটি খালি মানের তালিকা দেখা যাবে, যা উপরের ২য় চিত্রে দেখানো হলো। যদি স্ক্রিনে না দেখা যায় তবে [AC] চেপে [OPTN] [3] বাটন চাপতে হবে। ClassWiz ক্যালকুলেটরটি, 1 চলকের গণসংখ্যা (Frequency) ছাড়া 160টি মান এবং গণসংখ্যাসহ 80টি মান নিতে সক্ষম।

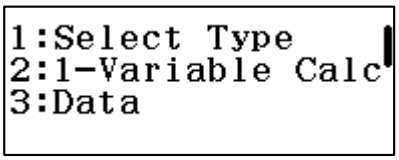
ধরা যাক, কোনো মৌসুমের জানুয়ারি মাসের 31 দিনের সর্বনিম্ন তাপমাত্রা (সেলসিয়াস) নিচে দেয়া হলো।

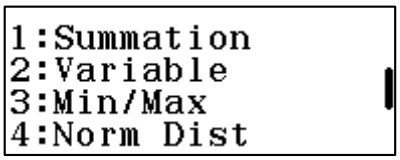
$14°, 14°, 14°, 13°, 12°, 13°, 10°, 10°, 11°, 12°, 11°, 10°, 9°, 8°, 9°, 11°, 10°, 10°, 8°, 9°, 7°,$

$6°, 6°, 6°, 6°, 7°, 8°, 9°, 9°, 8°, 7°$

মানগুলো ক্যালকুলেটর এর x কলামে প্রবেশ করাতে হবে। মনে রাখতে হবে, মান দেওয়ার পর প্রত্যেক বার [=] বাটন চাপতে হবে।

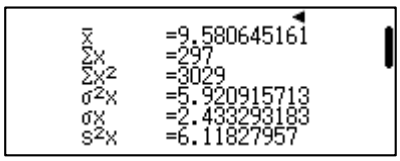
মানগুলো প্রবেশ করানোর সময় যদি ভূল হয়, তাহলে [▲] [▼] বাটন চেপে, মানগুলো চেক করে নেয়া যায়। যদি ভূল হয়ে থাকে, তবে, যে জায়গায় ভূল হয়েছে, সেখানে কার্সারটি নিয়ে সঠিক মানটি দিয়ে [=] বাটন চাপতে হবে। এরপর [AC] বাটন চাপতে হবে এবং নিম্নোক্ত চিত্র দেখা যাবে।

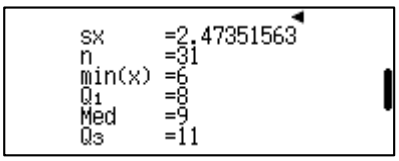


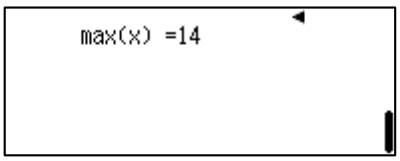


কোনোভাবেই Statistics *Mode* ত্যাগ করা যাবে না, তাহলে সবগুলো ডাটা মুছে যাবে, সেক্ষেত্রে আবার নতুন করে [MENU] [6] বাটন চেপে শুরু করতে হবে। এরপর পরিসংখ্যান এর বিভিন্ন মান বের করার জন্য [OPTN] বাটন চাপতে হবে এবং সবগুলো option দেখার জন্য [▼] বাটন চাপতে হবে। স্ক্রিনগুলো উপরের ২য় ও ৩য় চিত্রে দেখানো হলো।

এখন [2] (1-Variable Calc) বাটন চাপলে এক চলকের সবগুলো ফলাফল দেখা যাবে। এরপর 3টি স্ক্রিন আসবে, যা দেখার জন্য [▼] বাটন চাপতে হবে। স্ক্রিনসমূহ নিচের চিত্রে দেখানো হলো,







প্রথমেই পাওয়া যাবে $\bar{x}$ যা গড়মান প্রকাশ করে, এখানে $\bar{x} = 9.580645161$, তাহলে বলা যায়, উক্ত মৌসুমের জানুয়ারি মাসের গড় তাপমাত্রা 9.580645161; (সেলসিয়াস) এছাড়া জানুয়ারি মাসের সর্বমোট তাপমাত্রা $\sum x$ থেকে পাওয়া যায়। $\sum x$ এর থেকে গড় মান পাওয়া যায়।

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{297}{31} = 9.58064;$$

২য় স্ক্রিন এর n এর মান থেকে বুঝা যায়, 31টি মান আছে অর্থাৎ 31 দিনের তাপমাত্রা প্রবেশ করানো হয়েছে। min এবং max থেকে সর্বনিম্ন এবং সর্বোচ্চ তাপমাত্রা পাওয়া যায়, যা এক্ষেত্রে যথাক্রমে 6° এবং 14° স্ক্রিনে আরো অনেক গুলো মান দেখা যায়, যেমন

$\sigma_x^2 = 5.920915713$, যা ভেদাঙ্ক (Variance)

$\sigma_x = 2.433293183$, যা পরিমিতো ব্যবধান (Standard Deviation)

$S_x^2 = 6.11827957$, যা উপাত্ত হতে ভেদাঙ্ক (Variance from the sample)

$S_x = 2.47351563$, যা উপাত্ত হতে পরিমিতো ব্যবধান (Standard Deviation from the Sample)

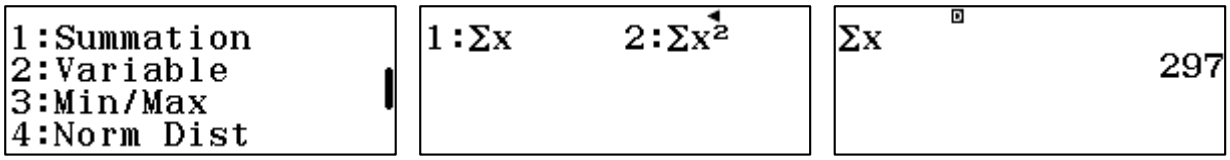
এছাড়া চতুর্থক (Quartiles)-

$Q_1 = 8$

$Q_2 = Med(median) =$ মধ্যক $= 9$

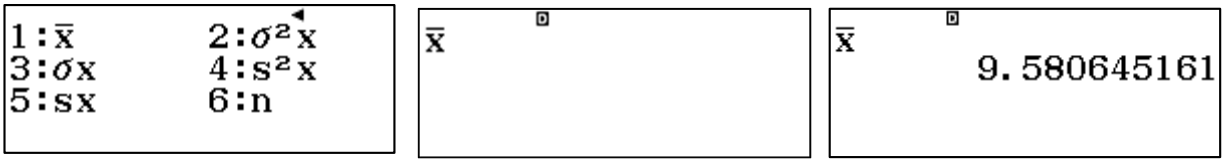
$Q_3 = 11$ পাওয়া যায়।

এছাড়াও আলাদা ভাবে উপরোক্ত ফলগুলো বের করা যায়। এজন্য উপাত্তগুলো প্রবেশ করানোর পর [AC] বাটন চেপে, [OPTN] এবং তারপর [▼] বাটন চাপতে হবে। স্ক্রিনটি নিচে দেখানো হলো,



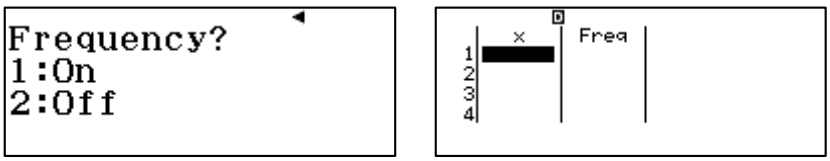
এরপর [1] (Summation) বাটন চাপলে $\sum x$ এবং $\sum x^2$ যোগফল বের করা যাবে, শুধুমাত্র $\sum x$ বের করতে হলে, [1] বাটন চেপে [=] বাটন চাপতে হবে, ফলে $\sum x = 297$ পাওয়া যাবে। যা উপরের ২য় ও ৩য় চিত্রে দেখানো হলো। একই ভাবে $\sum x^2$ বের করা যায়।

আবার [2] (Variable) বাটন চাপলে, নিম্নোক্ত স্ক্রিন দেখা যাবে।



এই তালিকা থেকে, [1] থেকে [6] বাটন ব্যবহার করে, গড়মান ভেদাঙ্ক, পরিমিতো ব্যবধান ও মোট প্রবেশকৃত সংখ্যা জানা যাবে।, শুধুমাত্র গড় $\bar{x}$ বের করতে হলে, [1] বাটন চেপে [=] বাটন চাপতে হবে, ফলে $\bar{x} = 9.58064$ পাওয়া যাবে। যা উপরের ২য় ও ৩য় চিত্রে দেখানো হলো।একই ভাবে min/max তালিকা থেকে min, max, med (মধ্যক) এবং চতুর্থকগুলো বের করা যায়।

আবার, গণসংখ্যাসহ কাজ করার জন্য নিম্নোক্ত চিত্রে আসতে হবে, সেইজন্য নিম্নোক্ত বাটন চাপতে হবে, [MENU] [6] [1] [AC] [SHIFT] [MENU] [▼] [3]



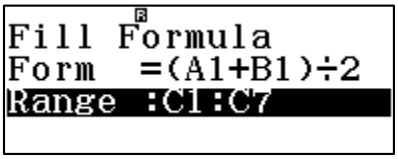
এরপর [1] বাটন চাপলে উপরের ২য় স্ক্রিনটি দেখা যাবে, মনে রাখতে হবে, এখন প্রতিটি কলামে 80টি করে মান প্রবেশ করানো যাবে। ২য় চিত্রে 2 টি কলাম দেখা যাচ্ছে, প্রথমটি x এবং দ্বিতীয়টি Frequency (গণসংখ্যা) প্রবেশ করানোর জন্যে। ক্যালকুলেটরটি, কিভাবে গণসংখ্যা নিয়ে কাজ করে, তা দেখার জন্য নিচের উদাহরণটি খেয়াল করি।

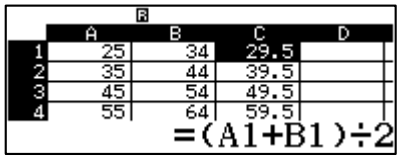
কোনো একটি শ্রেণির শিক্ষার্থীদের গণিতে প্রাপ্ত নম্বরের গণসংখ্যা সারণি নিচে দেওয়া হলো।

শ্রেণী ব্যাপ্তি	গণসংখ্যা
25-34	5
35-44	10
45-54	15
55-64	20
65-74	30
75-84	16
85-94	4

এখানে যেহেতু শ্রেণীব্যপ্তি আছে এবং ক্যালকুলেটরে, x কলামে একটি করে মান প্রবেশ করাতে হয়, সেহেতু, আমাদের শ্রেণী মধ্যমান নির্ণয় করে তা x কলামে প্রবেশ করাতে হবে। মধ্যমান Spreadsheet এর মাধ্যমে নির্ণয় করে, নিম্নোক্ত টেবিল তৈরি করা হলো-

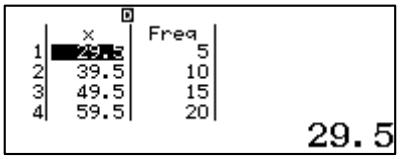
$$\text{শ্রেণি মধ্যমান} = \frac{\text{শ্রেণির উর্ধ্বমান} + \text{শ্রেণির নিম্নমান}}{2}$$

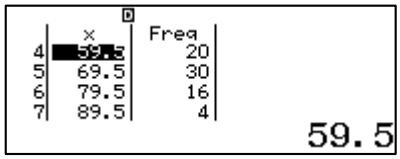




শ্রেণী ব্যাপ্তি	শ্রেণির মধ্যমান	গণসংখ্যা
25-34	29.5	5
35-44	39.5	10
45-54	49.5	15
55-64	59.5	20
65-74	69.5	30
75-84	79.5	16
85-94	89.5	4
		n = 100

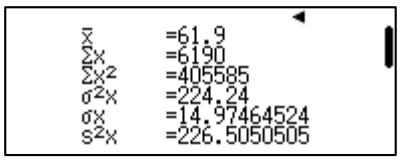
এখানে ক্যালকুলেটরের x কলামে মধ্যমান এবং frequency কলামে গণসংখ্যা প্রবেশ করাতে হবে। মনে রাখতে হবে প্রত্যেকটি উপাত্ত প্রবেশ করানোর পর [=] বাটন চাপতে হবে। উপাত্তগুলো প্রবেশ করানোর পর নিম্নোক্ত স্ক্রিন ২টি দেখা যাবে

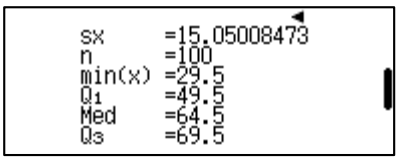


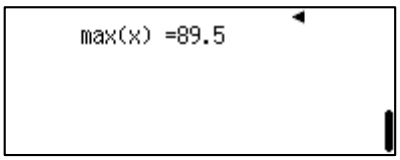


উপাত্তগুলো ঠিকমতো প্রবেশ করানো হলো কিনা তা চেক করার জন্য [▲] ও [▼] বাটন ব্যবহার করা যায়।

এখন পূর্বের মতো, [AC] বাটন চেপে, [OPTN] [2] বাটন চাপলে, পূর্বের মতো সবগুলো ফলাফল স্ক্রিনে দেখা যাবে, যা নিচে দেখানো হলো

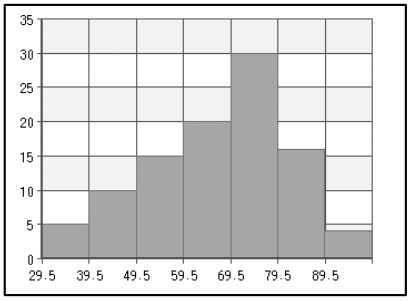






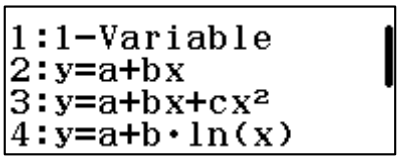
চিত্র হতে, শিক্ষার্থীদের গণিতে প্রাপ্ত নম্বরের গাণিতিক গড় = 61.9 এবং মধ্যক = 64.5

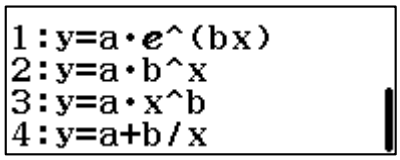
এখন প্রথমে AC বাটন চেপে এরপর OPTN 3 চাপলে পূর্বের অবস্থা ফিরে আসবে। এরপর SHIFT OPTN বাটন চাপলে একটি QR code প্রদর্শিত হবে। যা নিম্নো দেখানো হলো। এই QR code টি Smart Phone এর মাধ্যমে স্ক্র্যান করলে, Casio website-এ এই পরিসংখ্যানটির আয়তলেখ পাওয়া যাবে, যা নিচে দেখানো হলো, লক্ষণীয়যে, এজন্য মোবাইলে ইন্টারনেট চালু থাকতে হবে



১৪.১.২ দুই- চলকের আলোচনা

দুই- চলকের পরিসংখ্যানের ডাটা সমূহ 2 টি চলকের মাধ্যমে প্রকাশ করা হয়ে থাকে, ClassWiz ক্যালকুলেটরটি চলকগুলোর মান x ও y এর মাধ্যমে নিয়ে থাকে। পূর্বের মতো MENU 6 বাটন চেপে statistics *Mode*- প্রবেশ করতে হবে। MENU 6 চাপার পর নিম্নোক্ত চিত্র দেখা যাবে।

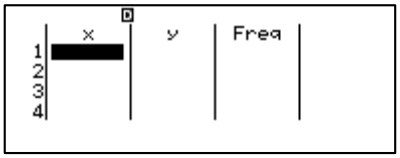


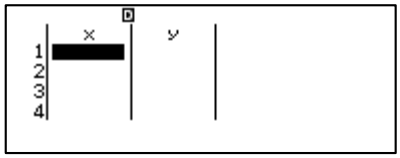


তালিকার ১ম বাছাইটি বাদ দিয়ে বাকী সবগুলো বাছাই দিয়ে দুই চলকের নিম্নোক্ত আকারের সমস্যা সমাধান করা যায়। মডেলগুলো নিচে দেয়া হলো,

Linear (রৈখিক) $y = a + bx$
Quadratic (দ্বিঘাত) $y = a + bx + cx^2$
Logarithmic (দ্বিঘাত) $y = a + b\ln x$
Exponential (সূচকীয়) $y = ae^{bx}$
Indices (সূচকীয়) $y = ab^x$
Power (ঘাত) $y = ax^b$
Inverse (বিপরীত) $y = a + \frac{b}{x}$

Linear (রৈখিক) সম্পর্ক নিয়ে কাজ করার জন্য 2 চেপে শুরু করা যায়। 2 চেপে প্রবেশ করার পর স্ক্রিনটি নিচে দেয়া হলোঃ





গণসংখ্যা ছাড়া কাজ করার জন্যে, পূর্বের মতো Frequency (গণসংখ্যা) off করতে হবে। তার জন্যে নিম্নোক্ত বাটন চাপতে হবে।

[AC] [SHIFT] [MENU] (▼) [3] [2] এবং উপরের ২য় চিত্রটি দেখা যাবে।যদি স্ক্রিনটি দেখা না যায় তবে [OPTN] [4] বাটন চাপতে হবে।

ClassWiz ক্যালকুলেটরটি প্রতিটি কলামে 80টি করে মান নিতে পারে। ক্যালকুলেটরটি কিভাবে দুই-চলকের সমস্যা সমাধান করে তা বুঝার জন্যে নিম্নোক্ত উদাহরণ খেয়াল করি।

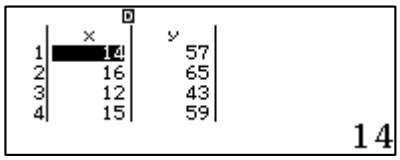
একটি স্কুলের বাচ্চাদের হার্টবিটের পালস্ 15 সেকেন্ড ও 60 সেকেন্ডের জন্য নেয়া হলো। প্রাপ্ত 2 ভিন্ন সময়ের উপাত্ত তুলনামূলক আলোচনা করা হলো।

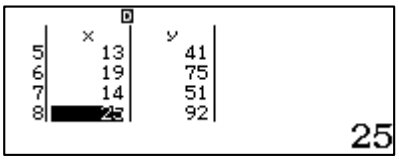
একটি স্কুলে কিছু নার্স 14টি বাচ্চার একটি গ্রুপের 15 সেকেন্ড এর হার্টবিট এবং পুনরায় 60 সেকেন্ড এর হার্টবিট নিলো। তাদের প্রাপ্ত রেজাল্ট নিম্নো দেয়া হলো।

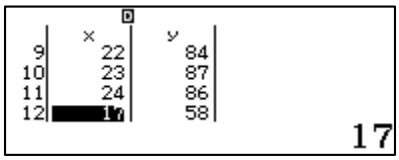
x (15 সেকেন্ডের হার্টবিট)	14	16	12	15	13	19	14	25	22	23	24	17	20	18
y (60 সেকেন্ডের হার্টবিট)	57	65	43	59	41	75	51	92	84	87	86	58	70	68

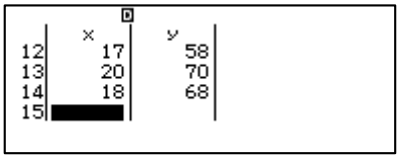
এখন পর্যায়ক্রমে x কলামে 15 সেকেন্ডের হার্টবিট এবং y কলামে 60 সেকেন্ডের হার্টবিট উপাত্তগুলো প্রবেশ করাতে হবে। মনে রাখতে হবে, প্রত্যেক বার উপাত্ত দেয়ার পর [=] বাটন চাপতে হবে। উপাত্তগুলো পুনরায় চেক করার জন্য (▲) ও (▼) বাটনগুলো ব্যবহার করা যায়।

x কলাম থেকে y কলামে যাওয়ার জন্যে (▶)বাটন এবং বিপরীতে যাওয়ার জন্যে (◀) বাটন ব্যবহার করতে হবে। মানগুলো প্রবেশ করানোর পর নিম্নোক্ত স্ক্রিন সমূহ দেখা যাবে।

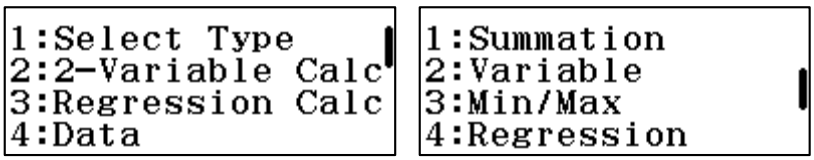




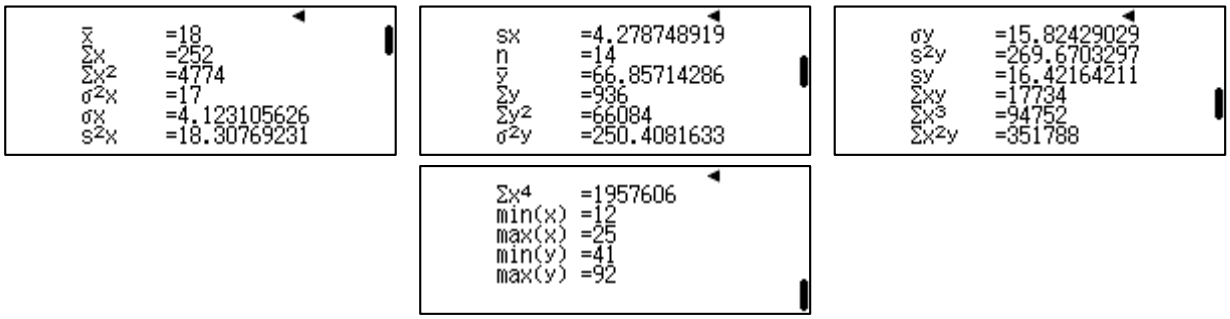




যদি নতুন xও y এর মান প্রবেশের প্রয়োজন পরে (কলামগুলোর মাঝে) তবে সবগুলো ডাটা না মুছে, যে জায়গার নতুন মান প্রবেশ করাতে হবে, সেখানে কার্সরটি নিয়ে গিয়ে [OPTN] [2] [1] চেপে নতুন মান জোড়া প্রবেশ করাতে হবে। এরপর [AC]বাটন চাপতে হবে এবং উপরের শেষ স্ক্রিন দেখা যাবে। এরপর [OPTN] বাটন এবং (▼)বাটন চাপলে নিম্নোক্ত স্ক্রিন সমূহ দেখা যাবে।



চিত্রে দেখানো ১ম স্ক্রীনে গিয়ে, 2 (2-Variable table) বাটন চাপলে নিম্নোক্ত ফলাফল সমূহ দেখা যাবে



স্ক্রিনগুলো হতে, সরাসরি

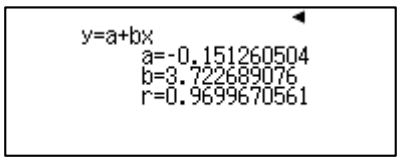
15 সেকেন্ড হার্টবিটের গড়, $\overline{x} = 18$,

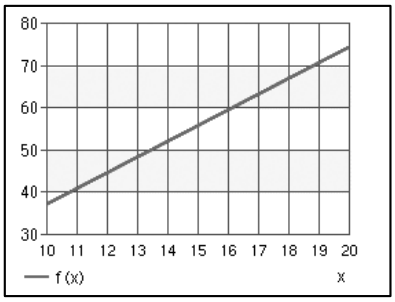
15 ” ” পরিমিতো ব্যবধান, $\sigma_x = 4.123105$

এবং 60 সেকেন্ড হার্টবিটের গড়, $\overline{y} = 66.85714286$

60 সেকেন্ড হার্টবিটের পরিমিতো ব্যবধান, $\sigma_y = 15.82429029$ পাওয়া যায়।

এখন x ও y এর মধ্যে রৈখিক সম্পর্ক জানার জন্যে, প্রথমে AC বাটন চেপে OPTN 3 (Regression calc) বাটন চাপতে হবে। নিম্নোক্ত চিত্র পাওয়া যাবে।

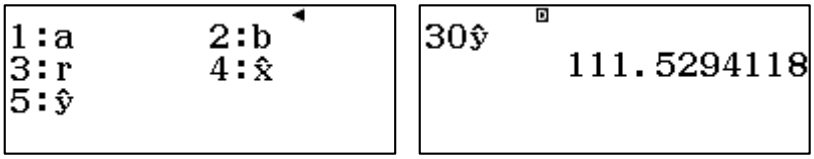




সুতরাং রৈখিক সম্পর্কটি (2 দশমিক স্থান নিয়ে)

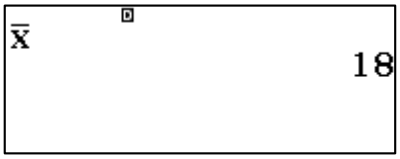
$$y = -0.15 + 3.72x \Longrightarrow y = 3.72x - 0.15$$

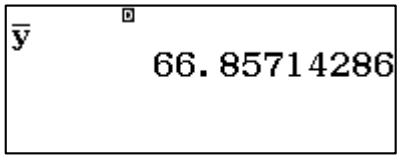
এবং r হচ্ছে, correlation coefficient এবং এর দ্বারা ডাটাগুলো কতটা সম্পর্কিত তা বুঝা যায়। এখন OPTN তালিকার ২য় চিত্রে হতে আলাদা ভাবে প্রত্যেকটি মান বের করা যাবে। যেমন AC বাটন চেপে এর ২য় স্ক্রিনে গিয়ে 4 (Regression) বাটন চাপলে নিম্নোক্ত চিত্র দেখা যাবে।



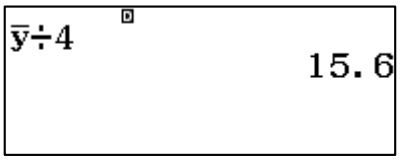
উক্ত ক্যালকুলেটরটি, রৈখিক বা যেকোনো মডেল ব্যবহার করার পর নতুন মান অনুমান করতে সাহায্য করে। যেমন, 15 সেকেন্ড হার্টবিট এর মান 30 এর জন্য 60 সেকেন্ড হার্টবিট এর মান কত হবে তা নির্ণয় করা যায়, তার জন্যে [AC] [3] [0] [OPTN] [▼] [4] [5] [=] এবং উপরের ২য় স্ক্রিনটি দেখা যাবে। অর্থাৎ 15 সেকেন্ড এর হার্টবিট 30 হলে, 60 সেকেন্ড এর হার্টবিট হবে 111.5294118.

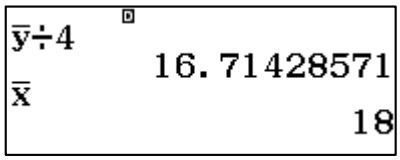
বিপরীত ভাবে, 60 সেকেন্ড হার্টবিট এর জন্য 15 সেকেন্ড হার্টবিট বের করা যায়, তার জন্য $\hat{y}$ স্থলে $\hat{x}$ নিতে হবে। এখন শুধুমাত্র 15 সেকেন্ডের হার্টবিট এর গড় জানতে হলে, OPTN তালিকার ২য় স্ক্রিনে গিয়ে, [2] (Variable) বাটন চেপে [1] ($\bar{x}$) বাটন চাপতে হবে এবং [=] বাটন দিতে হবে, এবং নিচের ১ম স্ক্রিনটি দেখা যাবে।





এবং একই ভাবে 60 সেকেন্ডের হার্টবিট এর গড় জানতে [AC] [OPTN] [▼] [2] [7] [=] বাটন চাপলে উপরের ২য় স্ক্রিন দেখা যাবে।এখন 60 সেকেন্ডের হার্টবিটের গড়ের সাথে 15 সেকেন্ডের হার্টবিটের গড়ের পার্থক্য দেখার জন্য [AC] [OPTN] [▼] [2] [7] [÷] [4] [=] নিচের ১ম স্ক্রিনটি দেখা যাবে।





আবার, [OPTN] [▼] [2] [1] [=] চাপলে উপরের ২য় স্ক্রিন দেখা যাবে।

১৪.২ অন্যান্য রিগরেশন মডেল

রৈখিক মডেলের মতো, অন্যান্য মডেলেও, ClassWiz ক্যালকুলেটর শুধুমাত্র a ও b এর মান বের করে, কিন্তু দ্বিঘাত মডেলে c এর মান সহ বের হয়। (দুই-চলকের অন্য মডেল বাছাই করলেও প্রবেশকৃত মান x ও y কলামে সংরক্ষিত থাকে, যদি না 1-চলক বাছাই বা [MENU] [6] দিয়ে নতুন ভাবে statistics *mode* প্রবেশ করানো হয়। সেক্ষেত্রে পুনরায় ডাটা প্রবেশ করাতে হবে।)

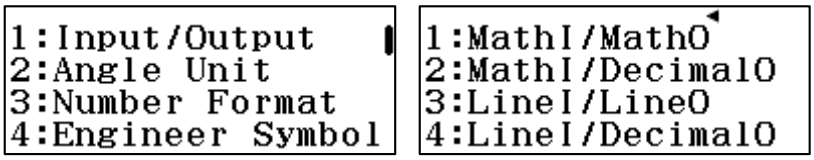
ক্যালকুলেটরের রেজাল্ট বিভিন্ন মডেলে বিভিন্ন দেখাবে, তাই আগে থেকে নিশ্চিত ভাবে জানতে হবে কোনো মডেল নিয়ে কাজ করতে হবে। দুই-চলকের ১ম মডেল বা রৈখিক মডেল বাদ দিয়ে বাকী মডেলগুলো অরৈখিক সম্পর্ক নিয়ে কাজ করে কিন্তু মডেলগুলো অরৈখিক নয়। কিছু মডেল বক্র-রৈখিক (Curvelinear) নামে পরিচিত, কারণ তাদের প্রদর্শিত চিত্র বক্র হয়।

অন্যান্য মডেলগুলোতে পূর্বর মতোই, আগে x ও y কলামে উপাত্ত বসিয়ে দুই-চলকের বিভিন্ন ফলাফল পাওয়া যায় এবং Regression ব্যবহার করে একটি চলকের নতুন মানের জন্য অন্য চলকের নতুন মান বের করা যায়।

১৪.৩ সম্ভাবনা (Probability)

সম্ভাবনা শব্দটি আমাদের বাস্তব জীবনের সাথে মিশে আছে। আমরা কথায় কথায় সম্ভাবনা ব্যবহার করে থাকি, যেমন, আজ বৃষ্টি হবে কিনা, বাংলাদেশ ক্রিকেট দল আজ জিতবে কিনা বা লটারিতে জিতব কিনা ইত্যাদি। ClassWiz ক্যালকুলেটর সম্ভাবনা নির্ণয়ে অনেক সহায়ক, বিশেষ করে যখন সমস্যাটির সমাবেশ বা বিন্যাস বুঝা যায়।

সম্ভাবনা করার জন্য ক্যালকুলেটরটির *Mode*, Line Input রাখা উত্তম। এর জন্য [SHIFT] [MENU] বাটন চেপে [1] (Input/output) বাটন এবং এরপর [3] (Line 1/ line0) বাটন চাপতে হবে। যা চিত্রে দেখানো হলো



১৪.৪ কোনো ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা

মনে করি, কোনো দৈব পরীক্ষায় সসীম ঘটনাজগত S এর উপাদানসমূহ সম্পূর্ণ, সমসম্ভাব্য ও পরস্পর বর্জনশীল এবং ঘটনজগত S এর অন্তর্গত A একটি ঘটনা। A ঘটনার উপাদান সংখ্যা $= n(A)$ এবং ঘটনজগতের

উপাদান সংখ্যা $= n(S)$ হলে, A ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা $P(A)$ দ্বারা সূচিত করা হয়, এবং তা

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{A \text{ ঘটনার উপাদান সংখ্যা}}{S \text{ ঘটনাজগতের মোট উপাদান সংখ্যা}}$$

যেমন, লুডুর ছক্কা দৈব ভাবে নিক্ষেপ করলে 4 আসার সম্ভাবনা $= \frac{1}{6}$। কেননা, ছক্কাগুটিতে

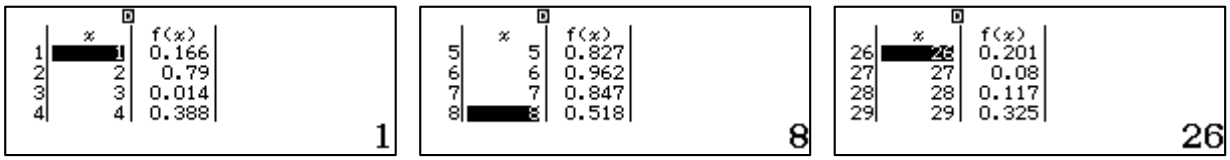
মোট উপাদান $= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = 6$ টি এবং 4 ঘটনাটি 1 বার উপস্থিত।

১৪.৫ দৈব ঘটনা

ClassWiz ক্যালকুলেটরটি, Ran # ([SHIFT] [•]) এবং Ran Int # ([ALPHA] [•]) নির্দেশনাটি ব্যবহার করে দৈব চয়ন (RANDOM)পদ্ধতিতে সংখ্যা প্রদর্শন করে।

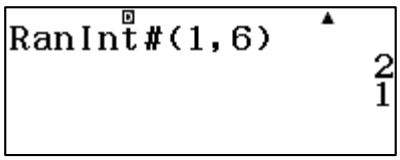
Ran # ([SHIFT] [•]) নির্দেশনটি শূন্য (0) হতে বড় এবং 1 হতে ছোট সংখ্যা দৈব চয়ন পদ্ধতিতে প্রদর্শন করে এবং তা করার জন্য বার বার [=] বাটন চাপতে হবে (এটি করার জন্য [SHIFT] [•] [=] দিয়ে বার বার [=] বাটন চাপুন)। কিছু সংখ্যা নিচে দেখানো হলো (মনে রাখা প্রয়োজন স্ক্রিনে একই সংখ্যা নাও আসতে পারে, কারণ এটি দৈব চয়ন পদ্ধতিতে হয়ে থাকে।)

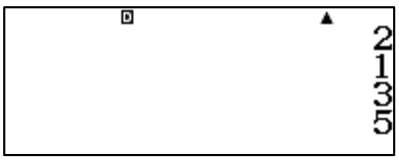
উক্ত ক্যালকুলেটরে table *mode* ব্যবহার করে 0 হতে 1 এর মধ্যে 30টি দৈব চয়ন সংখ্যা এক বারে বের করা যায়। এর জন্য [MENU] [9] বাটন চেপে $f(x)$ এর স্থলে Ran # প্রবেশ করাতে হবে এবং End = 30 বসাতে হবে। যা নিম্নো দেখানো হলো-

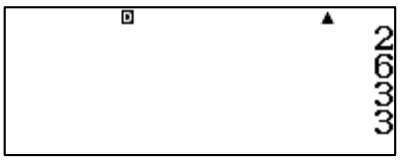


সবগুলো মান দেখার জন্য [▼] ও [▲] ব্যবহার করার যায়।

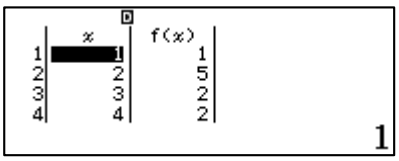
দৈব চয়ন পদ্ধতিতে পূর্ণ সংখ্যা বের করতে হলে Ran Int # নির্দেশনা ব্যবহার করতে হয়, এর জন্য [ALPHA] [•] দিয়ে শুরু ও শেষ মান (যার মধ্যে পূর্ণ সংখ্যা নির্ণয় করতে হবে) প্রবেশ করাতে হবে এবং বার বার [=] বাটন চাপতে হবে। যেমন ছক্কাগুটির জন্য দৈব চয়ন পদ্ধতি কি আসতে পারে তা বের করার জন্য, নিচের স্ক্রিন এ দেখানো হলো

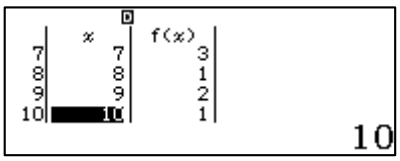






পূর্বের মতে Table *Mode* ব্যবহার করে 30টি মান বের করা যায়। যা নিচে স্ক্রিন এ দেখানো হলো





১৪.৬ সমাবেশ ব্যবহার করে সম্ভাবনা নির্ণয়

স্বাভাবিক ভাবে, nটি জিনিস থেকে r টি জিনিস বাছাই করার নিয়ম,

$^{n}C_r = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$ [! চিহ্নটি এর জন্য SHIFT x^{-1} বাটন চাপতে হবে।]

C ব্যবহার করতে হলে SHIFT ÷ বাটন চাপতে হবে। একটি উদাহরণ এর মাধ্যমে বুঝা যাক,

একটি পাত্রে 8টি লাল, 4টি কালো ও 3টি সাদা বল আছে। 3টি বল দৈবভাবে নেয়া হলো; (i)2 টি বল লাল

(ii) কমপক্ষে 2টি লাল বল হবার সম্ভাবনা নির্ণয় কর?

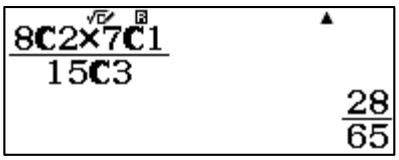
(i)2 টি লাল বল হবার অর্থ- 8টি লাল বল হতে 2টি বল বাছাই করা এবং অন্য রংয়ের 7টি বল হতে 1টি বল বাছাই করা।

∴ ঘটনা জগতের মোট ঘটনা $=^{15}C_3$

2টি লাল বল বাছাই এর ঘটনা $= {}^{8}C_2$

অন্য রংয়ের 1টি বল বাছাই এর ঘটনা $= {}^{7}C_1$

∴P (2টি লাল ও ভিন্ন রংয়ের একটি বল) $= \frac{^{8}C_2 \times {}^{7}C_1}{^{15}C_3} = \frac{28}{65}$



(Key log- ▭/▭ 8 SHIFT ÷ 2 × 7 SHIFT ÷ 1 ▶ 1 5 SHIFT ÷ 3 =)

(ii) কমপক্ষে 2টি লাল বল হবার অর্থ- লাল বল 2টি অথবা 3টি

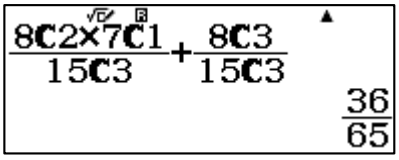
$\therefore P$ (2 টি লাল বল এবং 1টি ভিন্ন রংয়ের বল) + P (3 টি লাল বল)

$$= \frac{^{8}C_2 \times {}^{7}C_1}{^{15}C_3} + \frac{^{8}C_3}{^{15}C_3} = \frac{36}{65}$$

3 টি লাল বলের ক্ষেত্রে,

মোট ঘটনা সংখ্যা = ${}^{15}C_3$

লাল বলের ঘটনা সংখ্যা = ${}^{8}C_3$

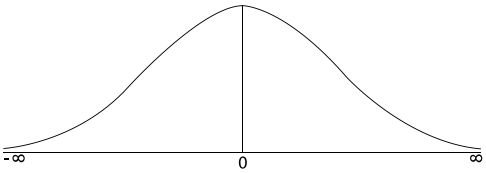


(Key log- [▭/▭] [8] [SHIFT] [÷] [2] [×] [7] [SHIFT] [÷] [1] [▶] [1] [5] [SHIFT] [÷] [3] [▶] [+] [▭/▭] [8] [SHIFT] [÷] [3] [▶] [1] [5] [SHIFT] [÷] [3] [=])

১৪.৭ সম্ভাবনার পরিমিতো বিন্যাস (Normal Probability Distribution)

ClassWiz ক্যালকুলেটরের সাহায্যে আদর্শ পরিমিতো বিন্যাস বা চলকের সম্ভাবনা নির্ণয় করা যায়।

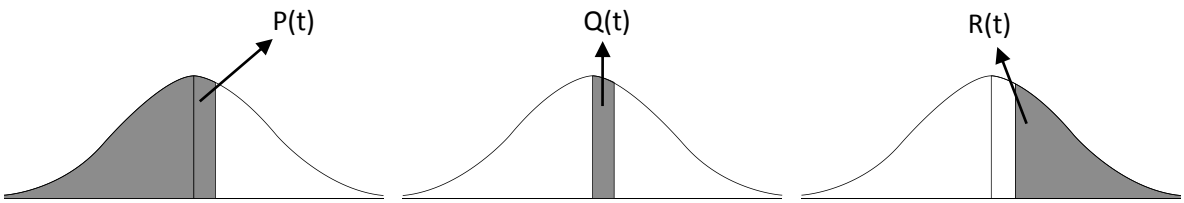
প্রাকৃতিকভাবে সংঘটিত অনেক ঘটনা সম্ভাবনার পরিমিতো বিন্যাস মেনে চলে এবং চিত্রটি পরিমিতো রেখা (Bell shaped curve), যা নিচে দেখানো হলো-



চিত্র- পরিমিতো রেখা

[আদর্শ পরিমিতো বিন্যাসের গড়, $\mu = 0$ এবং ভেদাঙ্ক, $\sigma^2 = 1$]

পরিমিতো রেখার দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 1. পরিমিতো রেখার আওতাধীন কোনো নির্দিষ্ট অংশের ক্ষেত্রফল পরিমিতো সম্ভাবনা ব্যবহার করে নির্ণয় করা যায়। পরিমিতো রেখার মধ্যবিন্দু, আদর্শ পরিমিতো দৈব চলক, $z = 0$ তে সমান দু'ভাগে বিভক্ত হয়। তিনটি ভিন্ন ব্যবধিতে, z এর সম্ভাবনা নির্ণয় করা যায়। যাদের চিত্র নিম্নো দেওয়া হলো-



যাদের সম্ভাবনা হচ্ছে,

$P(t) = Prob\ (z \leq t)$

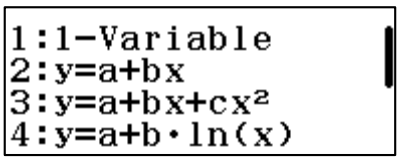
$Q\ (t) = Prob\ (0 \leq z \leq t)$

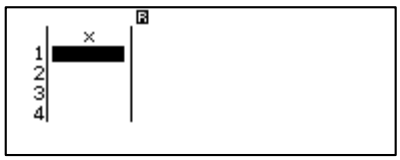
$R(t) = Prob\ (z \geq t)$

এখানে,

Probability ($-\infty < z \leq 0$) = 0.5
Probability ($0 \leq z < \infty$) = 0.5

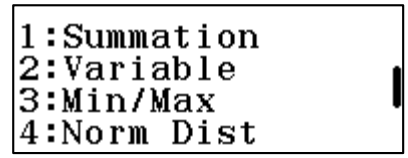
পরিমিতো বিন্যাস করার জন্যে ক্যালকুলেটরটিকে $1 - variable\ statistics\ Mode$ -এ আনতে হবে, তার জন্য [MENU] [6] [1] চাপতে হবে। স্ক্রিনগুলো নিম্নো দেয়া হলো।

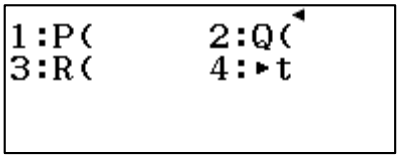




এখন ক্যালকুলেটরটি এক চলকের মান নেওয়ার জন্য প্রস্তুত, যা পূর্বে এক চলকের আলোচনায় ব্যাখ্যা করা হয়েছে। পূর্বের ন্যায় এক চলকের তথ্য উপাত্ত সমূহ ক্যালকুলেটরে প্রবেশ করাতে হবে। তবে পূর্বে আমরা তথ্য-উপাত্তের বিশ্লেষণ করেছি, এখন আমরা পরিমিতো বিন্যাস করব। পরিমিতো বিন্যাস করার জন্য গড় (Mean), পরিমিতো ব্যবধান (standard deviation) এবং ভেদাঙ্ক (Variance) জানা থাকতে হবে, যা এক চলকের বিশ্লেষণ হতে জানা যাবে।

এখন, [AC] বাটন চেপে [OPTN] [▼] চাপলে নিম্নোক্ত স্ক্রিনগুলো দেখা যাবে।



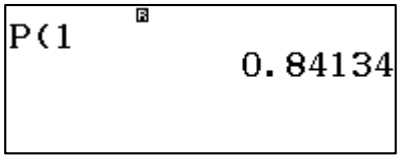


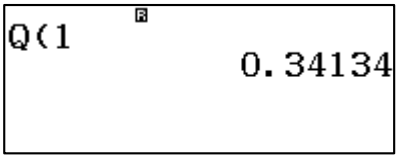
এরপর [4] বাটন চাপলে, পরিমিতো বিন্যাসের option (বাছাইগুলো) দেখা যাবে, যা উপরের ৩য় স্ক্রিনে দেখানো হলো।

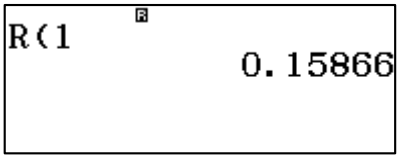
উক্ত Option গুলো হতে, যেকোনো মানের জন্য প্রয়োজনীয় অঞ্চলের সম্ভাবতা বের করা যায়। যেমন, মনে করি, $z = 1$. তাহলে, উপরের পরিমিতো রেখা চিত্র ০২ হতে,

$$Q\ (1) = P(1) - 0.5 \text{ এবং } R(1) = 1 - P(1) = 0.5 - Q(1)$$

ক্যালকুলেটর এর সাহায্যে তা সহজেই বের করা যায়। তার জন্য [1] বাটন চেপে P বাছাইটি নিয়ে আবার [1] চেপে [=] বাটন চাপতে হবে। আবার Q বাছাইটির জন্য [2] বাটন চেপে [1] দিয়ে [=] বাটন চাপতে হবে এবং R বাছাইটির জন্য [3] দিয়ে [1] [=] বাটন চাপতে হবে। যা নিচের স্ক্রিনগুলো দেখা যাবে।



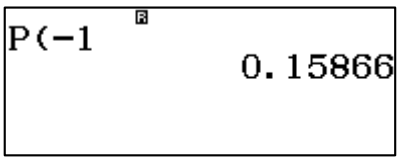


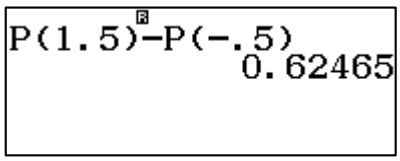


যেহেতু পরিমিতো বিন্যাস $z = 0$ তে প্রতিসম, অর্থাৎ

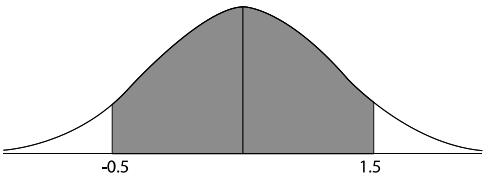
$$z \leq -1 \text{ এর সম্ভাবনা} = z \geq 1 \text{এর সম্ভাবনা}$$

উপরের পরিমিতো রেখার চিত্র হতে তা সহজেই বুঝা যায়। z এর মান ধনাত্মক বা ঋণাত্মক উভয়ের জন্য মান বের করা যায়। যা নিচের স্ক্রিনে দেখানো হলো-





উপরের ২য় চিত্র এর মতো আমরা খুব সহজেই ব্যবধির সম্ভাবনা বের করতে পারি। যেমন $-0.5 \leq z \leq 1.5$ এর সম্ভাবনা বের করতে, ($z \leq 1.5$ এর সম্ভাবনা) $-$ ($z \leq -0.5$ এর সম্ভাবনা) $= 0.62465$ [২য় চিত্রে হতে]



অনেক সময় চলক সমূহের গড় $(mean), \mu = 0$ এবং ভেদাঙ্ক (variance) , $\sigma^2 = 1$ আকারে বিন্যস্ত থাকে না। সাধারণত যদি কোনো চলক X এর গড় μ এবং ভেদাঙ্ক σ^2 হয়, তবে পরিবর্তিত আদর্শ পরিমিতো চলক হবে-

$$z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

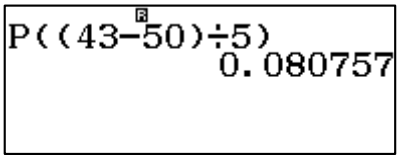
ClassWiz ক্যালকুলেটরে উক্ত পরিবর্তিত চলক দিয়ে সরাসরি সম্ভাবনা নির্ণয় করা যায়।

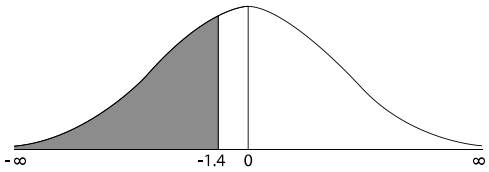
ধরা যাক, কোনো স্কুলের ছাত্রদের উচ্চতার গড় 50 ইঞ্চি এবং ভেদাঙ্ক 25 ইঞ্চি। এখন তাদের মধ্য হতে একটি ছাত্র বাছাই করা হলো। ছাত্রটির উচ্চতা 43 এর কম হওয়ার সম্ভাবনা কত হবে?

এখন আদর্শ পরিমিতো চলক z নির্ণয় করতে হবে, $x = 43$ এর জন্য যেখানে, $\mu = 50$ এবং $\sigma^2 = 25 \Rightarrow \sigma = 5$ [পরিমিতো ব্যবধান (standard deviation)]

$$\therefore z = \frac{43 - 50}{5} = -1.4$$

যা নিচের চিত্রে দেখানো হলো,





AC OPTN ▼ 4 1 (4 3 − 5 0) ÷ 5) =

তাহলে আমরা বলতে পারি, উক্ত স্কুলের প্রায় 8% ছাত্রদের উচ্চতা 43 ইঞ্চির কম হবে।

আবার ছাত্রদের উচ্চতা 42 ইঞ্চি থেকে 60 ইঞ্চি হওয়ার সম্ভাবনা হবে

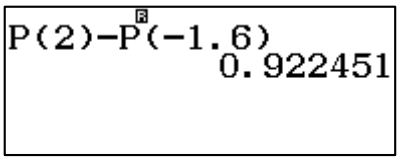
$= P(42 \leq X \leq 60)$

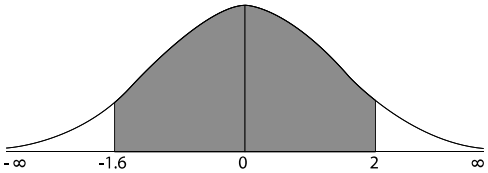
$= P\left(\frac{42-50}{5} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{60-50}{5}\right)$

$= P(-1.6 \leq z \leq 2)$

$= 0.922451$ (ক্যালকুলেটর হতে)

যা নিচে দেখানো হলো





AC OPTN ▼ 4 1 2) − OPTN ▼ 4 1 − 1 • 6) =

অর্থাৎ, ছাত্রদের উচ্চতা 42 ইঞ্চি থেকে 60 ইঞ্চি হওয়ার সম্ভাবনা 92% থেকে বেশি।

উদাহরণমালা

১। কোনো স্কুলের 10ম শ্রেণির 60 জন শিক্ষার্থীর ওজনের (কিলোগ্রাম) গণসংখ্যা নিবেশন হলো নিম্নরূপ-

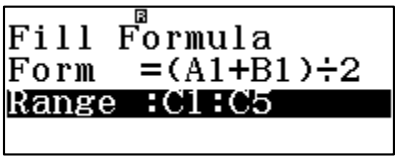
ওজন (কেজি)	46-50	51-55	56-60	61-65	66-70
গণসংখ্যা (শিক্ষার্থীর সংখ্যা)	5	10	20	15	10

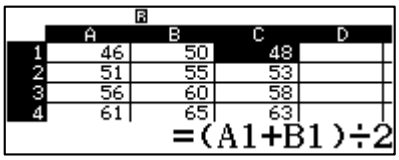
i.) গণসংখ্যা নিবেশনের আয়তলেখ আঁক।

ii.) আয়তলেখের গণসংখ্যা বহুভুজআঁক।

সমাধান- যেহেতু, এই সমস্যায় ব্যবধি ব্যবহার করা হয়েছে এবং ক্যালকুলেটর-এ x কলামে একটি করে ডাটা প্রবেশ করানো যায়, সেহেতু মধ্যমান Spreadsheet এর মাধ্যমে নির্ণয় করে, নিম্নোক্ত টেবিল তৈরি করা হলো-

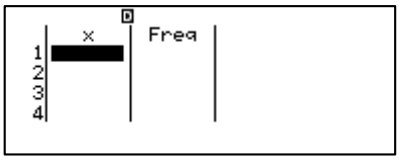
$$\text{মধ্যমান} = \frac{\text{ব্যবধির সর্বোচ্চ মান} + \text{ব্যবধির সর্বনিম্ন মান}}{2}$$

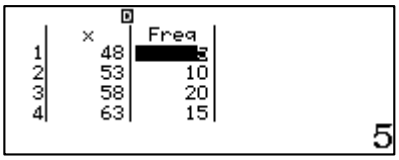


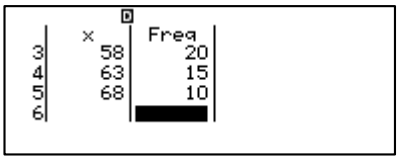


শ্রেণি মধ্যমান	গণসংখ্যা
48	5
53	10
58	20
63	15
68	10

এখন ক্যালকুলেটরের MENU 6 বাটন চেপে statistics *Mode*- এ আসতে হবে, এরপর 1-চলকের জন্য 1 বাটন চাপতে হবে। উক্ত সমস্যায় গণসংখ্যা থাকায়, গণসংখ্যা (Frequency *Mode*) চালু করতে হবে। এজন্য SHIFT MENU ▼ 3 1 চাপতে হবে এবং নিম্নোক্ত চিত্র দেখা যাবে।



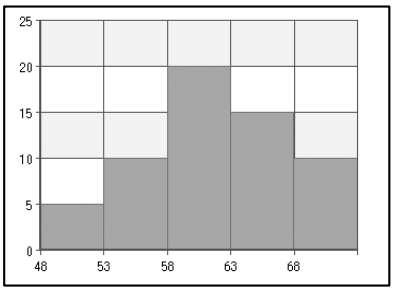




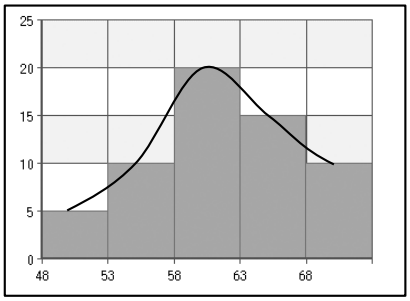
এখন Xকলামে মধ্যবিন্দু এবং Freq কলামে গণসংখ্যা প্রবেশ করাতে হবে। উপরের ২য় এবং ৩য় স্ক্রিন দুটি দেখা যাবে।

(Key log- 4 8 = 5 3 = 5 8 = 6 3 = 6 8 = ▶ ▼ 5 = 1 0 = 2 0 = 1 5 = 1 0 =)

i) এখন আয়তলেখ বের করার জন্য SHIFT OPTN বাটন চাপতে হবে, ফলে একটি QR Code স্ক্রিনে দেখা যাবে। উক্ত QR Code টি Smart Phone এর মাধ্যমে স্ক্যান করলে Casio website-এর উক্ত পরিসংখ্যানটি আয়তলেখ পাওয়া যাবে। যা নিচে দেখানো হলো, [লক্ষণীয় যে এজন্য মোবাইলে ইন্টারনেট চালু থাকতে হবে] ।



ii) আয়তলেখ হতে গণসংখ্যা বহুভুজ আঁকার জন্য প্রাপ্ত আয়তলেখের আয়তসমূহের ভূমির সমান্তরাল বিপরীত বাহুর মধ্যবিন্দুসমূহ নির্ণয় করে চিহ্নিত করা হয়, চিহ্নিত মধ্যবিন্দু সমূহ রেখাংশ দ্বারা সংযুক্ত করে গণসংখ্যা বহুভুজ আঁকা হয়। যা নিচে দেয়া হলো



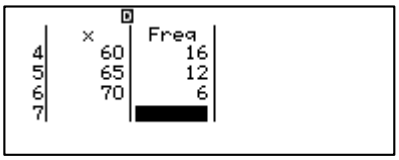
২ । নিচে 50 জন শিক্ষার্থীর ওজনের (কেজি) গণসংখ্যা নিবেশন সারণি দেওয়া হলো। প্রদত্ত ডাটার গাণিতিক গড় ও মধ্যক নির্ণয় কর।

ওজন	45	50	55	60	65	70
গণসংখ্যা	2	6	8	16	12	6

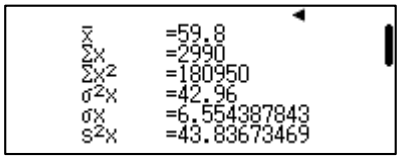
সমাধান- উক্ত সমস্যায় ব্যবধি নেই, ফলে ওজনের মান/ডাটা সমূহ সরাসরি x কলামে প্রবেশ করানো যাবে এবং গণসংখ্যা ডাটা সমূহ Freq কলামে প্রবেশ করানো হয়।

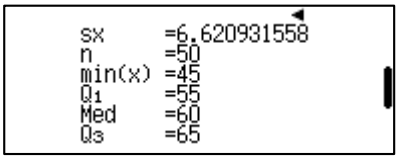
(Key log- MENU 6 1 SHIFT MENU ▼ 3 1 4 5 = 5 0 = 5 5 = 6 0 = 6 5 = 7 0 = ▶ ▼ 2 = 6 = 8 = 1 6 = 1 2 = 6 =)

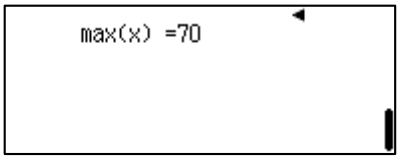
এর পর নিম্নোক্ত চিত্র দেখা যাবে।



এখন AC বাটন চেপে OPTN 2 বাটন চাপলে, স্ক্রিনে নিম্নোক্ত চিত্রসমূহ দেখা যাবে।







$\therefore$ গাণিতিক গড়, $\overline{x} = 59.8$ (কেজি)

এবং মধ্যক, Med = 60 (কেজি)

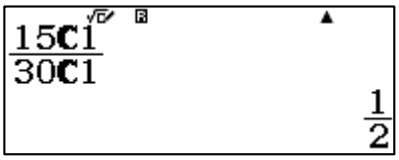
৩। 30 টি টিকেট 1 থেকে 30 পর্যন্ত ক্রমিক নম্বর দেয়া আছে। টিকিটগুলো ভালোভাবে মিশিয়ে একটি টিকেট দৈবভাবে নেয়া হলো। টিকেটটি (i) জোড় সংখ্যা (ii) চার দ্বারা বিভাজ্য (iii) 8 এর চেয়ে ছোট (iv) 22 এর চেয়ে বড় হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর।

সমাধান- 30 টি টিকেট হতে 1 টি টিকেট দৈবভাবে নেয়া হলে, ঘটনাজগতের মোট উপাদান সংখ্যা = ${}^{30}C_1$

এখন,

(i) জোড় সংখ্যা হওয়ার সম্ভাবনা- 1 হতে 30 এর মধ্যে জোড় সংখ্যা আছে 15 টি। উক্ত 15 টি টিকেট হতে 1 টি টিকেট দৈবভাবে নেয়া হলে, জোড় ঘটনা ঘটার উপাদান সংখ্যা = ${}^{15}C_1$.

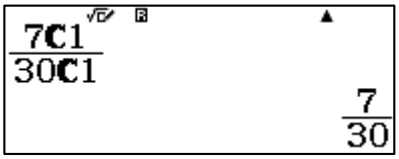
$\therefore$P (জোড় সংখ্যা) বা জোড় সংখ্যা আসার সম্ভাবনা = $\frac{{}^{15}C_1}{{}^{30}C_1} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$



(Key log- MENU 1 ▭ 1 5 SHIFT ÷ 1 ▶ 3 0 SHIFT ÷ 1 =)

(ii) চার দ্বারা বিভাজ্য হওয়ার সম্ভাবনা- 1 হতে 30 এর মধ্যে, চার দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যা 7 টি। উক্ত 7 টি হতে 1 টি টিকে দৈবভাবে নেয়া হলে, চার দ্বারা বিভাজ্য ঘটনা ঘটার উপাদান সংখ্যা = ${}^{7}C_1$

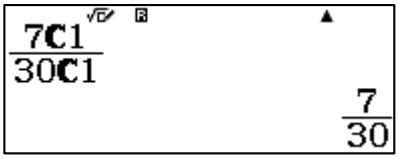
$\therefore$P (চার দ্বারা বিভাজ্য) = $\frac{{}^{7}C_1}{{}^{30}C_1} = \frac{7}{30}$



(Key log- ▭ 7 SHIFT ÷ 1 ▶ 3 0 SHIFT ÷ 1 =)

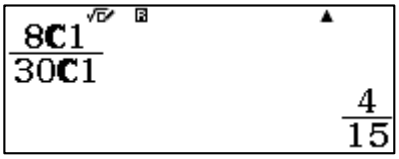
(iii) 8 এর চেয়ে ছোট হওয়ার সম্ভাবনা- 1 হতে 30 এর মধ্যে 8এর চেয়ে ছোট সংখ্যাটি 7 টি।

$\therefore$P (8এর চেয়ে ছোট) = $\frac{{}^{7}C_1}{{}^{30}C_1} = \frac{7}{30}$



(iv) 22 এর চেয়ে বড় হওয়ার সম্ভাবনা- 1 হেতে 30 এর মধ্যে 22 এর চেয়ে বড় সংখ্যা 8 টি।

$\therefore$P (22এর চেয়ে বড়) = $\frac{{}^{8}C_1}{{}^{30}C_1} = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$.

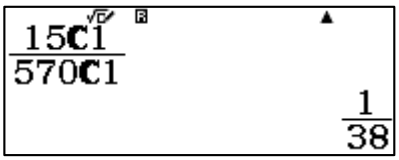


(Key log- [▭] [8] [SHIFT] [÷] [1] [▶] [3] [0] [SHIFT] [÷] [1] [=])

৪। কোনো একটি লটারিতে 570 টি টিকেট বিক্রি হয়েছে। রহিম 15 টি টিকেট কিনছে। টিকেটগুলো ভালোভাবে মিশিয়ে 1 টি টিকেট দৈবভাবে প্রথম পুরস্কারের জন্য তোলা হলো। রহিমের প্রথম পুরস্কার পাওয়ার সম্ভাবনা কত?

সমাধান- 570 টি টিকেট হতে, 1 টি টিকেট দৈবভাবে তোলা হলে, ঘটনাজগতের মোট উপাদান সংখ্যা = ${}^{570}C_1$ এবং রহিমের 15 টি টিকেট হতে 1 টি টিকেট দৈবভাবে তোলা হলে, উক্ত ঘটনার উপাদান সংখ্যা = ${}^{15}C_1$

$\therefore$ রহিমের প্রথম পুরস্কার পাওয়ার সম্ভাবনা = $\frac{{}^{15}C_1}{{}^{570}C_1} = \frac{15}{570} = \frac{1}{38}$

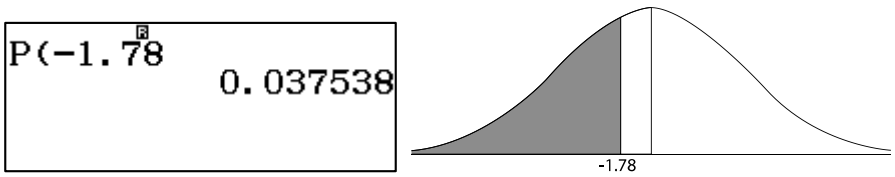


(Key log- [▭] [1] [5] [SHIFT] [÷] [1] [▶] [5] [7] [0] [SHIFT] [÷] [1] [=])

৫। সম্ভাবনা নির্ণয় কর-

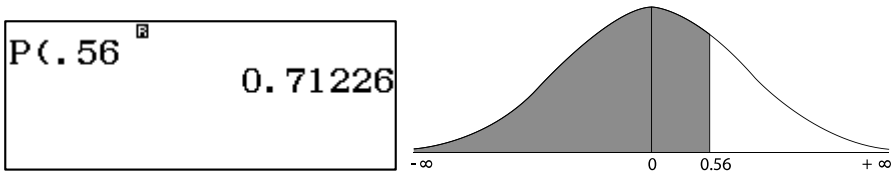
i) $P(z < -1.78)$
ii) $P(z < 0.56)$
iii) $P(z > -1.45)$
iv) $P(z > 2)$
v) $P(-1.48 \leq z < 2.82)$

সমাধান- i) $P(z < -1.78)$ Ans- 0.0375



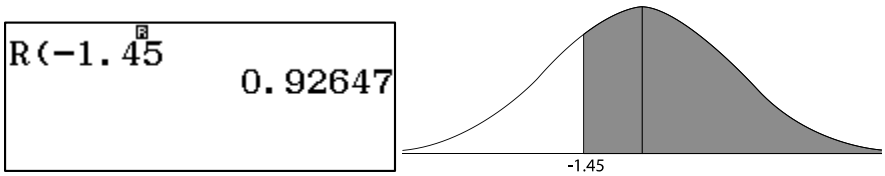
(Key log- [AC] [OPTN] [▼] [4] [1] [−] [1] [•] [7] [8] [=])

ii) $P(z < 0.56)$- 0.7123



(Key log- [AC] [OPTN] [▼] [4] [1] [•] [5] [6] [=])

iii) $P(z > -1.45)$- [মনে রাখতে হবে বড়/বেশি চাইলে R ব্যবহার করতে হবে] $Ans - 0.92647$



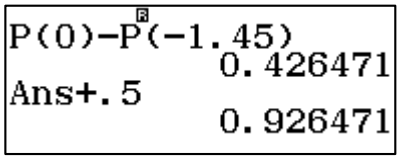
(Key log- AC OPTN ▼ 4 3 − 1 • 4 5 =)

বিকল্প উপায়- $P(z > -1.45)$

$= P(-1.45 < z < 0) + P(0 < z < \infty)$

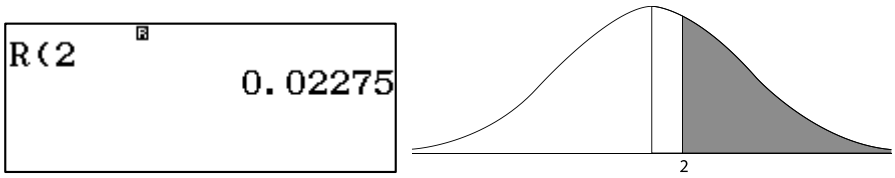
$= 0.42647 + 0.5$

$= 0.92647$



(Key log- AC OPTN ▼ 4 1 0) − OPTN ▼ 4 1 − 1 • 4 5) = + • 5 =)

iv) $P(z > 2)$ $Ans - 0.02275$

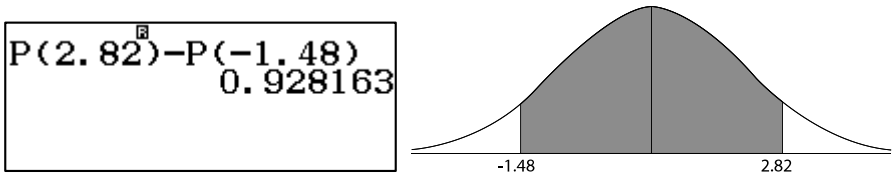


(Key log- AC OPTN ▼ 4 3 2 =)

বিকল্প উপায়- $P(0 < z < \infty) - P(0 < z < 2) = 0.5 - 0.47725$

$= 0.2275$

v) $P(-1.48 \leq z < 2.82) - 0.928163$



(Key log- AC OPTN ▼ 4 1 2 • 8 2) − OPTN ▼ 4 1 − 1 • 4 8) =)

৬। একটি পরিমিতো X চলকের গড় = 27 এবং ভেদাঙ্ক = 36 হলে,

(i) $P(36 \leq X \leq 42)$ এর মান নির্ণয় কর।

(ii) $(P(X \leq 15)$ এবং $P(X \geq 45)$ এর মান তুলনা কর।

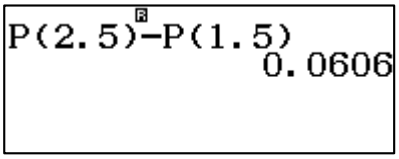
সমাধান-

(i) $P(36 \leq X \ \leq 42)$

$= P\left(\frac{36-27}{6} \leq \frac{X-27}{6} \leq \frac{42-27}{0}\right)$ $\quad [\ \sigma^2 = 36 \Rightarrow \ \sigma = 6\ ]$

$= P(1.5 \leq z \leq 2.5)$

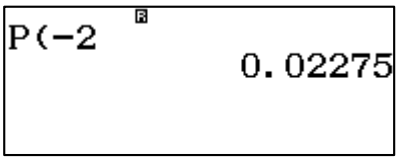
$= 0.0606$



(Key log- AC OPTN ▼ 4 1 2 • 5) − OPTN ▼ 4 1 1 • 5) =)

(ii) $(P(X \leq 15) = P\left(z \leq \frac{15-27}{6}\right)$

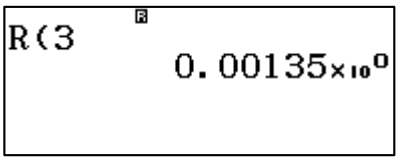
$= P(z \leq -2) = 0.02275$



(Key log- AC OPTN ▼ 4 1 − 2 =)

$P(X \geq 45) = P\left(z \geq \frac{41-27}{6}\right) = P(z \geq 3)$

$= 0.00135$



(Key log- AC OPTN ▼ 4 3 3 =)

৭। উত্তরা হোস্টেলের 300 জন ছাত্রের উপর জরিপ করে দেখা গেল যে, দৈনিক খরচের গড় 68 টাকা ও পরিমিতো ব্যবধান 3 টাকা। ছাত্রদের দৈনিক খরচ পরিমিতোভাবে বিন্যাস্ত।

(i) কতজন ছাত্রের দৈনিক খরচ 74 টাকার বেশি কিন্তু 80 টাকার কম হয়?

(ii) দৈনিক খরচ

(ক) 72 টাকার বেশি, (খ) কমপক্ষে 65 টাকা (গ) 64 টাকা বা তার কম (ঘ) বড় জোড় 80 টাকা

(ঙ) দৈনিক খরচ 60 থেকে 65 টাকার মধ্যে (চ) 65 টাকার বেশি 71 টাকার কম। প্রতিক্ষেত্রে সর্বোচ্চ ছাত্র সংখ্যা বের কর।

সমাধান- গড় $\mu = 68$ এবং পরিমিতো ব্যবধান $\sigma = 3$। মোট ছাত্র সংখ্যা $N = 300$

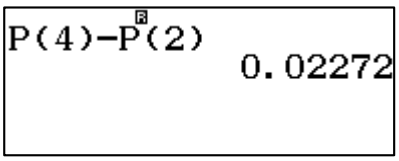
এখন (i) দৈনিক খরচ 74 টাকার বেশি কিন্তু 80 টাকার কম

$= P(74 < X < 80)$

$= P\left(\frac{74-68}{3} < \frac{X-68}{3} < \frac{80-68}{3}\right)$

$= P(2 < z < 4)$

$= 0.02272$



(Key log- AC OPTN ▼ 4 1 4) − OPTN ▼ 4 1 2) =)

এরূপ ছাত্রের সংখ্যা = $0.2272 \times 300 = 6.816 = 7$ জন (প্রায়)। সুতরাং 7 জন ছাত্রের দৈনিক খরচ 74 টাকার বেশি কিন্তু 80 টাকার কম।

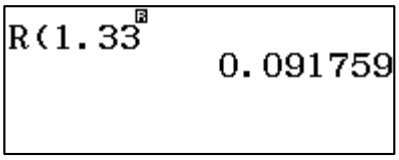
(ii) (ক) দৈনিক খরচ 72 টাকার বেশি হওয়ার সম্ভাবনা

$P(X > 72)$

$= P\left(z > \frac{72-68}{3}\right)$

$= P(z > 1.33)$

$= 0.091759$



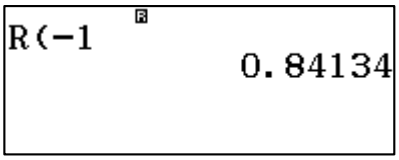
(Key log- AC OPTN ▼ 4 3 1 • 3 3 =)

এরূপ ছাত্রের সংখ্যা = $0.091759 \times 300 = 27.52 \approx 28$ জন

(খ) দৈনিক খরচ কমপক্ষে 65 টাকা $= P(X \geq 65)$

$= P(z \geq -1)$

$= .8413$

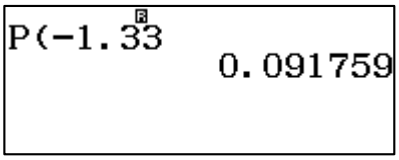


(Key log- AC OPTN ▼ 4 3 − 1 =)

এরূপ ছাত্রের সংখ্যা = $.8413 \times 300 = 252.402 \approx 253$ জন

(গ) দৈনিক খরচ 64 টাকা বা তার কম

$P(X \leq 64) = P(z \leq -1.33) = 0.091759$

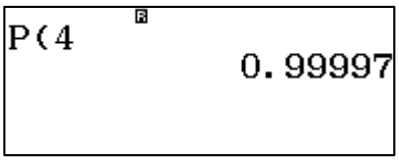


এরূপ ছাত্রের সংখ্যা = $0.091759 \times 300 = 27.52 \approx 28$ জন

(ঘ) দৈনিক খরচ বড়জোড় 80 টাকা

$= P(X \leq 80)$

$= P(z \leq 4) = 0.99997$



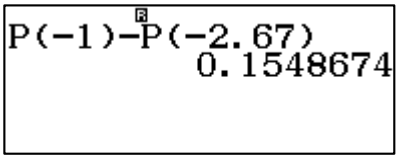
এরূপ ছাত্রের সংখ্যা = $.99997 \times 300 = 299.991 \approx 300$ জন

(ঙ) দৈনিক খরচ 60 থেকে 65 টাকা মধ্যে

$= P(60 \leq X \leq 65)$

$= P(-2.67 < z < -1)$

$= 0.1548674$



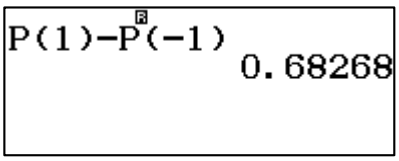
এরূপ ছাত্রের সংখ্যা = $0.15486 \times 300 = 46.46 \approx 47$ জন

(চ) দৈনিক খরচ 65 টাকার বেশি ও 71 টাকার কম

$= P(65 < X < 71)$

$= P(-1 < z < 1)$

$= 0.6826$



এরূপ ছাত্রের সংখ্যা = $0.6826 \times 300 = 204.804 \approx 205$ জন।

অনুশীলনী-১৪

১। ৫০ জন ছাত্রের পরীক্ষায় প্রাপ্ত নাম্বার নিচে দেয়া হলো-

$85, 50, 55, 56, 57, 64, 60, 58, 60, 61, 60, 62, 60, 63, 64, 60, 61, 63, 66, 67, 61, 70, 70, 68, 60, 63, 61. 50, 55, 57, 56, 63, 60, 62, 56, 67, 70, 69, 70, 69, 68, 70, 60, 56, 58, 61, 63, 64$

(ক) নাম্বারের গড় নির্ণয় কর।
(খ) গণসংখ্যার নিবেশনের আয়তলেখ আঁক।
২। নিচে ৫০ জন শিক্ষার্থীর ওজনের (কেজি) গণসংখ্যা নিবেশন সারণি দেওয়া হলো। গড় ও মধ্যক নির্ণয় কর।

ওজন (কেজি)	৪৫	৫০	৫৫	৬০	৬৫	৭০
গণসংখ্যা	২	৬	৮	১৬	১২	৬

৩। একজন কৃষকের এক সপ্তাহের প্রতিদিনের উপার্জিত টাকা নিচে দেয়া হলো,

$102.50, 250, 310, 150.70, 207.40, 120.90$ এবং 210.0 তার গড় আয় এবং পরিমিতো ব্যবধান বের কর।

৪। একজন রিসিপশনিস্ট তার কাছে আগত এক সপ্তাহের প্রতিদিনের ফোন কল রেকর্ড লিপিবদ্ধ করে রাখল, যা নিচে দেয়া হলো।

দিন	সোম	মঙ্গল	বুধ	বৃহঃ	শুক্র
সংখ্যা	140	125	134	132	1260

(i) প্রতিদিনের মোট ফোনকলের গড় ও পরিমিতো ব্যবধান নির্ণয় কর।
(ii) ক্যালকুলেশনের পর রিসিপশনিস্ট বুঝতে পারলো, শুক্রবারের ডাটা ভুল রেকর্ড হয়েছে। সঠিক হবে 126 । নতুন মান প্রবেশ করিয়ে নতুন গড় ও পরিমিতো ব্যবধান নির্ণয় কর।

৫। একটি স্কুলের বাচ্চারা প্রতিদিন টিফিনের জন্যে গড়ে $\mu = 8$ টাকা আনে। যদি পরিমিতো ব্যবধান $\sigma = 7$ হয়, তবে 20 টি বাচ্চাদের মধ্যে কতজন 3 টাকার চেয়ে কম আনে?

৬। দশম শ্রেণীর 70 টি ছাত্রের পোষা কবুতরের সংখ্যা নিবেশন নিচে দেয়া হলো-

কবুতরের সংখ্যা	0	1	2	3	4	5	6	7	8
ছাত্র সংখ্যা	12	25	12	10	6	2	1	0	2

গণসংখ্যা কলাম ব্যবহার করে, প্রতিটি ছাত্রের গড়ে কয়টি করে কবুতর থাকবে।

৭। Table *Mode* ব্যবহার করে, 1 হতে 8 এর মধ্যে 30 পূর্ণ দৈব সংখ্যা বের কর।

৮। 22 টি মোজার মধ্যে কত উপায়ে প্রথম 3 টি স্থান পূরণ করা যাবে।

৯। যদি z আদর্শ পরিমিতো চলক হয় তবে, বের কর-

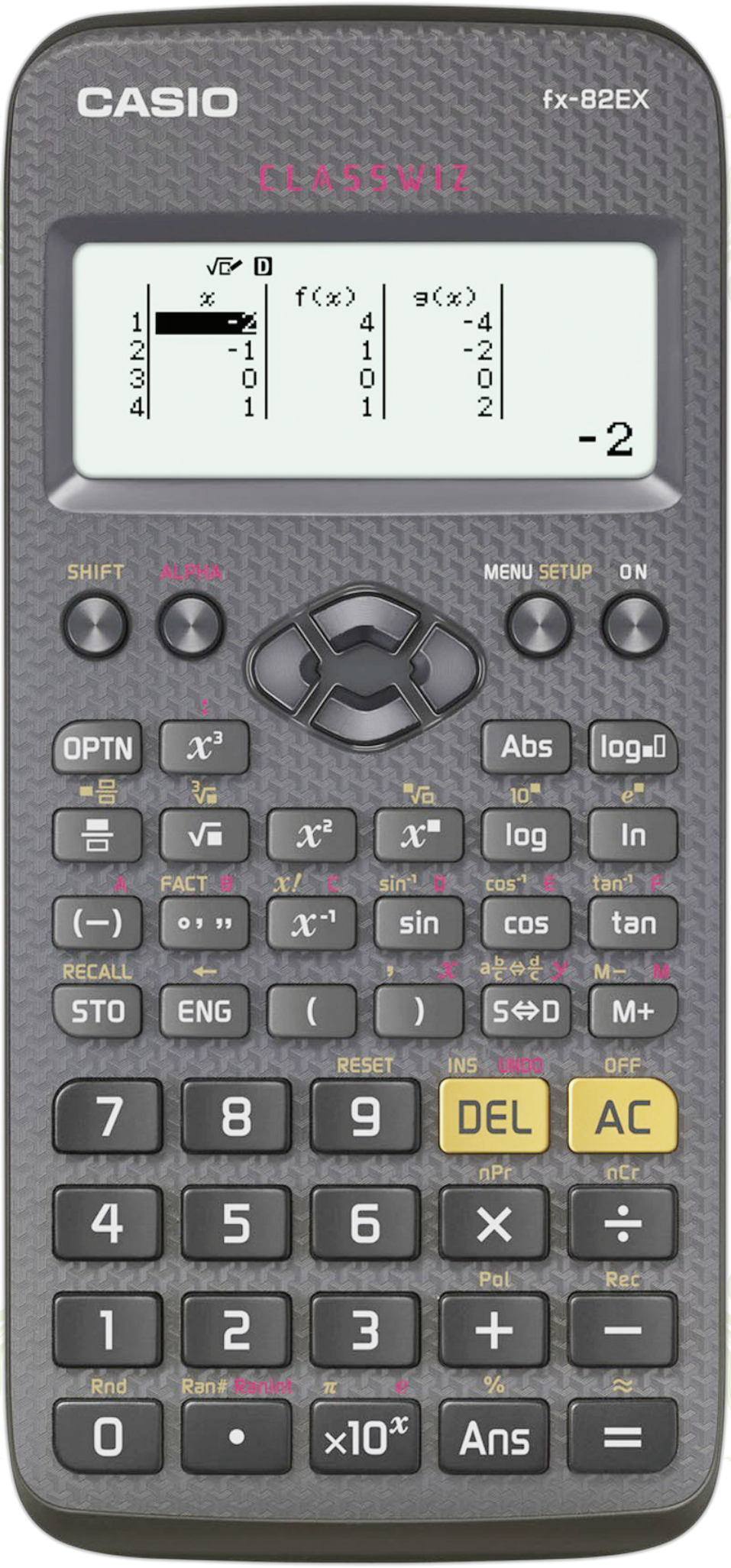
(i) $P(z < 0.74)$
(ii) $P(z > 1.8)$
(iii) $P(-1.5 < z < 0.6)$

বাটন পরিচিতি

SHIFT	এই বাটন চাপলে কীবোর্ড শিফটেড হয়ে যায় এবং অন্যান্য বাটনগুলোর উপরের হলোুদ কমান্ডগুলো কাজ করে।
ALPHA	ALPHA বাটন চাপলে ALPHA Input *mode* চালু হয়।
◀ ▲ ▼ ▶	বাটনগুলো ব্যবহার করে কোনো Input edit করা যায় বা Output দেখা যায়। এছাড়া কোথাও স্ক্রিন পরিবর্তনের জন্য ব্যবহার করতে হয়। কার্সরের স্থান পরিবর্তন করার জন্য এই বাটনগুলো ব্যবহার করা হয়।
MENU/SETUP	বাটন চাপলে সকল *mode* প্রদর্শিত হবে। SHIFT MENU চাপলে SETUP menu প্রদর্শিত হবে যেখানে ইনপুট আউটপুট ফরম্যাট ঠিক করা যায়।
ON	ON বাটন এর মাধ্যমে ক্যালকুলেটর অন করা যায়।
OPTN	কোনো একটি *mode* এ যেয়ে ঐ *mode* এর বিভিন্ন ধরনের Operation করার জন্য OPTN বাটন চাপতে হয়। আবার SHIFT OPTN চাপলে কোনো একটি তথ্য এর জন্য QR কোড জেনারেট হয়।
CALC/S O L V E	কোনো একটি বীজগাণিতিক রাশির মান বের করার জন্য CALC বাটন ব্যবহার করা হয়। কোনো সমীকরণ সমাধান করার জন্য SHIFT CALC চাপতে হয়।
∫/($\frac{d}{dx}$)	বাটন চেপে যোগজীকরণ করা যায়। SHIFT ∫ চাপলে অন্তরীকরণ অপারেটর প্রদর্শিত হয়।
x/Σ	সরাসরি x বাটন চাপলে x চলক ইনপুট হয়। SHIFT x চাপলে সামেশন চিহ্ন আসে যার মাধ্যমে কোনো ধারার যোগফল বের করা যায়।
▭/(▬▭)	বাটন চেপে ক্যালকুলেটরে ভগ্নাংশ প্রবেশ করাতে হয়। মিশ্র ভগ্নাংশ প্রবেশ করানোর জন্য SHIFT ▭ চাপতে হয়।
√▪/ ($\sqrt[3]{▪}$)	সংখ্যার বর্গমূল বের করার জন্য √▪ চাপতে হয়। ঘনমূল বের করার জন্য SHIFT √▪ চাপতে হয়।
x^2/x^3	কোনো সংখ্যার দ্বিঘাত বের করার জন্য x^2 বাটন ব্যবহার করতে হয় এবং ত্রিঘাত বের করার জন্য SHIFT x^2 চাপতে হয়। Base-N *mode* চালু থাকলে x^2 বাটন চাপলে কোনো সংখ্যা ডেসিমালে (Decimal) এ পরিণত হয়।
$x^▪$/($\sqrt[▪]{□}$)	কোনো সংখ্যার যেকোনো ঘাতের মান বের করার জন্য $x^▪$ বাটন এবং কোনো সংখ্যার যেকোনো মূল বের করার জন্য SHIFT $x^▪$ চাপতে হয়। Base-N *mode* অন থাকলে $x^▪$ বাটন চাপলে কোনো সংখ্যা হেক্সাডেসিমালে (Hexadecimal) এ পরিণত হয়।
$\log_▪$□/($10^▪$)	যেকোনো ভিত্তিযুক্ত লগারিদম প্রবেশ করার জন্য $\log_▪$□ বাটন ব্যবহার করা হয়। অ্যান্টি-লগ ব্যবহার করার জন্য SHIFT $\log_▪$□ ব্যবহার করতে হয়। Base-N *mode* এ থাকলে $\log_▪$□ বাটন চাপলে কোনো সংখ্যা বাইনারি (Binary) তে পরিণত হয়।
ln/($e^▪$)	ভিত্তিক লগারিদমের জন্য ln বাটন ব্যবহার করা হয়। SHIFT ln চাপলে ক্যালকুলেটরে *e* প্রদর্শিত হয়। Base- N *mode* এ থাকলে ln বাটন চাপলে কোনো সংখ্যা অক্টাল (Octal) এ পরিণত হয়।
°'''/FACT/B	ডিগ্রি চিহ্ন ব্যবহার করার জন্য °''' বাটন ব্যবহার করা হয়। SHIFT °''' চেপে FACT নির্দেশনা ব্যবহার করে কোনো সংখ্যার মৌলিক উৎপাদক বের করা যায়। ALPHA চাপলে B চলক প্রদর্শিত হয়।
x^{-1}/!/C	কোনো সংখ্যার গুণাত্মক বিপরীত বের করার জন্য x^{-1} বাটন ব্যবহার করা হয়। SHIFT x^{-1} চেপে ফ্যাক্টোরিয়াল চিহ্ন (!) প্রবেশ করানো যায়। ALPHA x^{-1} চেপে C চলক প্রবেশ করানো যায়।

[sin]/(sin^{-1})/D	চেপে sine অনুপাত প্রবেশ করাতে হয়। বিপরীত sine অনুপাত প্রবেশ করানোর জন্য [SHIFT] [sin] চাপতে হবে। [ALPHA] [sin] চাপলে D চলক প্রবেশ হবে।
[cos]/(cos^{-1})/E	[cos] চেপে cosine অনুপাত প্রবেশ করানো হয়। বিপরীত cosine অনুপাত প্রবেশ করানোর জন্য [SHIFT] [cos] চাপতে হবে। [ALPHA] [cos] চাপলে E চলক টাইপ হবে।
[tan]/(tan^{-1})/F	[tan] চেপে tangent অনুপাত প্রবেশ করানো হয়। বিপরীত tangent অনুপাত প্রবেশ করানোর জন্য [SHIFT] [tan] চাপতে হবে। [ALPHA] [tan] চাপলে F চলক টাইপ হয়।
[STO]/RECALL	কোনো চলকের মান সংরক্ষণ করার জন্য [STO] বাটন ব্যবহার করা হয়। মেমোরিকীগুলোতে কোনো একটি বিশেষ অবস্থায় কি কি মান সংরক্ষিত আছে তা একবারে দেখার জন্য [SHIFT] [STO] চাপতে হবে।
[ENG]/i	কোনো সংখ্যাকে ইঞ্জিনিয়ারিং নোটেশনে দেখার জন্য [ENG] বাটন চাপতে হবে। complex *mode* এ কোনো ইনপুট দেওয়ার জন্য [ENG] চাপতে হয়। আবার complex *mode* চেপে কাল্পনিক সংখ্যার একক i প্রবেশ করানো যায়।
[(]/Abs	বাম ব্যাকেট প্রবেশ করানোর জন্য [ENG] চাপতে হবে। কোনো রাশির পরমমান (Absolute value) বের করার জন্য [SHIFT] [(] চাপতে হবে।
[)]/(,)	কমা প্রবেশ করানোর জন্য [SHIFT] [)] চাপতে হয়। যদিও Casio ClassWiz এ x চলকের জন্য আলাদা বাটন আছে। কিন্তু [ALPHA] [)] চাপলেও x চলক টাইপ হয়।
[▭]/(▬⁄▭)	ভগ্নাংশকে দশমিক এং দশমিককে ভগ্নাংশে রূপান্তর করা যায়। মিশ্র ভগ্নাংশকে প্রকৃত ভগ্নাংশে এবং প্রকৃত ভগ্নাংশকে মিশ্র ভগ্নাংশে রূপান্তর করার জন্য [SHIFT] [▭] চাপতে হয়। [ALPHA] [▭] চাপলে y চলক টাইপ হয়।
[M+]/(M-)	M মেমোরিকীতে সংরক্ষিত কোনো মানের সাথে কিছু যোগ করতে চাইলে [M+] চাপতে হয় এবং কিছু বিয়োগ করতে হলে [SHIFT] [M+] চাপতে হয়।
[7]	[SHIFT] [7] চাপলে ধ্রুবক মানগুলির একটি তালিকা আসে।
[8]	[SHIFT] [8] চাপলে একক রূপান্তরের জন্য একটি তালিকা আসবে।
[DEL]	ক্যালকুলেটরে সব ডাটা মুছে ফেলে আবার Reset করার জন্য [SHIFT] [DEL] চাপতে হয়। কোনো ডিজিট মুছে ফেলার জন্য [DEL] বাটন চাপতে হয়।
[AC]	যেকোনো স্ক্রিন থেকে হোম স্ক্রিনে আসার জন্য [AC] চাপতে হয়। ক্যালকুলেটর অফ করার জন্য [SHIFT] [AC] চাপতে হয়।
[×]	গুণ করার জন্য [×] বাটন চাপতে হয়। বিন্যাস বা পারমুটেশন করার জন্য [SHIFT] [×] চাপতে হয়।
[÷]	ভাগ করার জন্য [÷] চাপতে হয়। সমাবেশ বা কম্বিনেশন করার জন্য [SHIFT] [÷] চাপতে হয়।
[+]	যোগ করার জন্য [+] বাটন চাপতে হয়। কার্তেসীয় স্থানাংক হতে পোলার স্থানাংকে রূপান্তরের জন্য [SHIFT] [+] চাপতে হয়।
[−]	বিয়োগ করার জন্য [−] বাটন চাপতে হয়। পোলার স্থানাংক হতে কার্তেসীয় স্থানাঙ্কে রূপান্তর করার জন্য [SHIFT] [−] চাপতে হয়।
[•]/Ran#	Random সংখ্যা জেনারেট করার জন্য [SHIFT] [•] চাপতে হয়।
[×10^x]/e	দশের ঘাত লিখার জন্য [×10^x] চাপতে হয়। e প্রবেশ করানোর জন্য [SHIFT] [SHIFT] চাপতে হয়।
[Ans]/[%]	সর্বশেষ উত্তর দেখার জন্য বা এর সাথে কোনো অপারেশন করার জন্য [Ans] চাপতে হয়। শতকরা চিহ্ন প্রবেশ করানোর জন্য [SHIFT] [%] চাপতে হয়।

Model: Fx-82EX



- The New Classroom Standard With High-resolution LCD Technology
- 552 Functions
- Easy and Intuitive operability
- Essential functions for learning all in one
- Simple and quick calculations
- Extensive and advanced service using QR Code
- Non-Programable
- Visualization with graphs
- Online Sharing
- Quick user manual call-up

Model: Fx991EX

BMOOC
www.bmooc.net

BacBon Limited
Your Learning Partner

+88 02 8396601
+8801836-149699
info@bacbonltd.com
www.bacbonltd.com

House # 11(3rd Floor), Block-B, Main Road, Banasree, Rampura, Dhaka-1219, Bangladesh
fb.com/bmooc.net